UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

59. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
(AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1955)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1955

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

59. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Cooke, J. C. On the Sums of Certain Series of Bessel Functions 253

Brauner, H. Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung 258

Schmidt, W. Über höhere kritische Determinanten von Sternkörpern. . . 274

Nöbauer, W. Über die Formengruppe 305

Erdös, P. an **K. Prachar.** Über die Anzahl der Lösungen von $(p-1, q-1) \leqq x$ 318

Petty, C. M. and **D. Waterman.** An Extremal Theorem for N-Simplexes . 320

Atkinson, F. V. On Orthogonal Polynomials with Extrema at the Ends of the Orthogonality Interval 323

Buchbesprechungen 331

On the Sums of Certain Series of Bessel Functions.

By

J. C. Cooke, University of Malaya, Singapore.

(Received April 4, 1955.)

Summary.

Though many forms of series of Bessel functions of increasing order appear in the literature, they all seem to involve a term by term increase in the order by unity, possibly by $\frac{1}{2}$, or by some integer greater than unity, usually 2. In *Watson's* „Bessel Functions" (1) no case appears in which the increase in the order is not an integer or $\frac{1}{2}$. The purpose of this note is to give the sums of series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_s(z) \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_s(z)$$

and similar series involving I_s, where s is of the form $2kn + \nu$ and k is any positive real number. Such series have occurred in the theory of heat conduction and fluid flow (2). The method is to replace the function by a contour integral of Schläfli type.

1. The integral representations.

We have

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} e^{z \sinh w - \nu w}\, dw, \tag{1}$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} e^{z \cosh w - \nu w}\, dw, \tag{2}$$

by *Watson* (1) § 6.2 equation (3) and § 6.22 equation (3), where

$$|\arg z| < \tfrac{1}{2}\pi, \text{ or } |\arg z| \leqq \tfrac{1}{2}\pi \text{ if } R(\nu) > 0.$$

2. Series involving J.

We have, if $s = 2nk + \nu$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \Sigma \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} e^{z \sinh w - sw}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int e^{z \sinh w} \frac{e^{-\nu w}}{1 - e^{-2kw}}\, dw, \tag{3}$$

on summing the series of exponentials; the latter may be done provided that $|e^{-2kw}| < 1$ i. e. $R(w) > 0$ so that the contour is to the right of the imaginary axis in the w-plane. It is permissible to reverse the order of integration and summation if $R(z) > 0$ since

$$\int |e^{z \sinh w}| \Sigma |e^{-sw}| |dw|$$

converges on the contour.

Since the integrand in (3) has simple poles only at the points given by $kw = \pm r i \pi$ where r is a positive integer or zero, we may deform the contour up to the imaginary axis, indented by semicircles all of radius δ to the right of the poles. We thus take the contour from $\infty - i\pi$ to $-i\pi$ to $i\pi$ to $\infty + i\pi$, part of it indented as explained above. We then let $\delta \to 0$.

The integral on the semi-circle round the pole $w = 0$ is $1/4k$; the sum of the integrals round the other poles is

$$\frac{1}{2k} \sum_{r=1}^{[k]} \cos\left(z \sin \frac{r\pi}{k} - \frac{r\nu\pi}{k}\right), \tag{4}$$

where $[k]$ means "the integral part of k". If k is an integer the points $w = \pm i\pi$ are poles and must be indented by quarter circles and the factor $1/2k$ must be replaced by $1/4k$ for the corresponding value of r namely $r = k$. If $k < 1$ the term (4) disappears.

Along the lines parallel to the real axis we put $w = \pm i\pi + x$ and the integral becomes

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - \nu)\pi + e^{2kx} \sin \nu\pi\} \exp\{-z \sinh x - \nu x\}}{\cosh 2kx - \cos 2k\pi}\, dx.$$

Along the imaginary axis we put $w = \pm i y$ and the value of the integral is

$$\frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{\sin(z \sin y - \nu y + k y)}{\sin k y}\, dy$$

where P stands for "the principal value of".

Hence we obtain the result

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_s(z) = \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} \sum_{r=1}^{[k]} \cos\left(z \sin \frac{r\pi}{k} - \frac{\nu r\pi}{k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{\sin(z \sin y - \nu y + k y)}{\sin ky} dy$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - \nu)\pi + e^{2kx} \sin \nu\pi\} \exp\{-z \sinh x - \nu x\}}{\cosh 2kx - \cos 2k\pi} dx.$$

If $k < 1$ the second term on the right hand side disappears; if k is an integer the factor corresponding to $r = k$ is $1/4k$ istead of $1/2k$.

Another result obtained similarly is

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_s(z) = \frac{1}{2k} \sum_{r=0}^{[k-1/2]} \cos\left\{z \sin \frac{(2r+1)\pi}{k} - \frac{(2r+1)\nu\pi}{k}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{\cos(z \sin y - \nu y + k y)}{\cos ky} dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - \nu)\pi - e^{2kx} \sin \nu\pi\} \exp\{-z \sin kx - \nu x\}}{\cosh 2kx + \cos 2k\pi.} dx.$$

If $k < \frac{1}{2}$ the first term on the right hand side disappears. If $k - \frac{1}{2}$ is an integer or zero the factor corresponding to $r = k - \frac{1}{2}$ is $1/4k$ instead of $1/2k$.

3. Series involving I.

Two more results similarly obtained are

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_s(z) = \frac{1}{4k} e^z + \frac{1}{2k} \sum_{r=1}^{[k]} \cos \frac{\nu r\pi}{k} \exp\left(z \cos \frac{r\pi}{k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{e^{z \cos y} (\sin ky - \nu y)}{\sin ky} dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - \nu)\pi + e^{2kx} \sin \nu\pi\} \exp\{-z \cosh x - \nu x\}}{\cosh 2kx - \cos 2k\pi} dx,$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_s(z) = \frac{1}{2k} \sum_{r=0}^{[k-1/2]} \cos \frac{(2r+1)\nu\pi}{k} \exp\left\{z \cos \frac{(2r+1)\pi}{2k}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{e^{z \cos y} \cos(ky - \nu y)}{\cos ky} dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - \nu)\pi - e^{2kx} \sin \nu\pi\} \exp\{-z \cosh x - \nu x\}}{\cosh 2kx + \cos 2k\pi} dx.$$

The same remarks about replacing the factor $1/2k$ by $1/4k$ apply as before.

4. Power series.

It is possible to sum series of the form $\Sigma t^s J_s(z)$ by the same method but the results are complicated. They can be simplified somewhat if a limitation is placed on the value of arg t. The full details are tedious so we will content ourselves by giving an outline only of the method.

We have, if $t = e^{a+i\theta}$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^s J_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} t^s e^{z \sinh w - sw}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int e^{z \sinh w} \frac{t^v e^{-vw}}{1 - t^{2k} e^{-2kw}}\, dw,$$

provided that $|t^{2k} e^{-2kw}| < 1$, i. e. $R(w) > a$, so that the contour must be to the right of the line $x = a$ in the w-plane.

We write $w = a + v$ and obtain

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^s J_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} \frac{e^{z \sinh (a+v)} e^{-vv} e^{vi\theta}}{1 - e^{-2kv} e^{2ki\theta}}\, dv$$

where the contour must be to the right of the imaginary axis in the v-plane.

Considerable simplification is obtained if we deform the contour so that the limits are $\infty + i(\pi + \theta)$ and $\infty - i(\pi - \theta)$. Consideration of the value of the integral along the line $v = R + i y$ where $R \to \infty$ shows that this may be done if $-\frac{1}{2}\pi - \arg z < \theta < \frac{1}{2}\pi + \arg z$.

If θ lies outside these limits the results seem too complicated to be worth recording.

Assuming the restriction on θ and deforming the contour as before we then obtain the result

$$\Sigma t^s J_s(z) = \frac{1}{4k} e^{\beta z} + \frac{1}{2k} \sum_{1}^{[k]} \cos\left\{\alpha z \sin\frac{r\pi}{k} - \frac{v r \pi}{k}\right\} \exp\left(\beta z \cos\frac{r\pi}{k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} P \int_0^{\pi} \frac{\sin(\alpha z \sin y - v y + k y) \exp(\beta z \cos y)}{\sin k y}\, dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\sin(2k - v)\pi + e^{2kx} \sin v\pi\} \exp\{-z(\alpha \sinh x + \beta \cosh x) - vx\}}{\cosh 2kx - \cos 2k\pi}\, dx \tag{5}$$

where $2\alpha = t + 1/t$, $2\beta = t - 1/t$, valid when $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ and when $-\frac{1}{2}\pi - \arg z < \theta < \frac{1}{2}\pi + \arg z$.

The same remarks about the factor $1/2k$ in the second term on the right hand side apply as before.

The result for $\Sigma(-1)^n t^s J_s(z)$ and those involving the functions I_s may be obtained similarly. They all simplify if $2k$ and ν are integers since the last integral then vanishes in each case.

References.

(1) *Watson, G. N., Theory of Bessel Functions* (Cambridge, 1944).

(2) *Sowerby, L.* and *Cooke, J. C., Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, **6**, (1953), 50.

Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung.

Von

H. Brauner, Wien.

(Eingelangt am 27. April 1955.)

Unter einer „*Projektion*" versteht man für gewöhnlich eine Abbildung der Punkte des Raumes auf die Punkte einer Bildebene, wobei die Zuordnung durch sogenannte „*Sehstrahlen*" hergestellt wird, die grundsätzlich geradlinig vorausgesetzt werden sollen. Diese ∞^2 Strahlen bilden eine gewisse *Strahlkongruenz*, und von dieser wird man bei Wunsch nach *Eindeutigkeit* verlangen, daß sie durch jeden Raumpunkt i. a. nur einen Sehstrahl sendet, also vom *Bündelgrad* 1 ist. Die einfachste Annahme dieser Art ist die eines Bündels mit eigentlichem oder uneigentlichem Zentrum, was auf die üblichen Projektionsmethoden der Darstellenden Geometrie führt. Außer diesen elementaren Abbildungsverfahren wurde auch noch verschiedentlich die Projektion mittels eines Sehstrahlnetzes herangezogen[1], wobei der Sonderfall eines Drehnetzes konstruktiv besonders bequem und ergiebig ist[2].

In der vorliegenden Arbeit soll nun, einer von *W. Wunderlich* in seiner Sondervorlesung über nichtlineare Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie ausgesprochenen Anregung folgend, als Abbildungsmittel die *Sehnenkongruenz einer Raumkubik* betrachtet werden,

---

[1] *J. Steiner*, ges. Werke I (Berlin 1881), 408.

[2] *L. Tuschel*, Über die Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwendung. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1911, 233—254. — *E. Müller*, Über Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1917, 915—929. — *L. Eckhart*, Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1918, 91—118. — *E. Kruppa*, Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräftesysteme. ZAMM 4 (1924), 146—155. — *K. Strubecker*, Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1931, 569ff. — *F. Hohenberg*, Parallelprojektion in nichteuklidischen Räumen. Mh. f. Math. u. Phys. 42 (1935), 425—437. — *W. Wunderlich*, Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Mh. f. Math. u. Phys. 44 (1936), 249—279.

die bekanntlich vom Bündelgrad 1 ist. Diese „*Sehnenprojektion*" wurde wohl schon vereinzelt als Hilfsmittel zur Behandlung der Flächen 3. Ordnung[3] und im Rahmen der Theorie der „konjugierten Sehnen" einer Kubik[4] eingesetzt, jedoch bisher nie eigens untersucht.

Der Gedanke, als Sehstrahlen die Sehnen einer Raumkurve zu verwenden, läßt sich natürlich auf beliebige Raumkurven ausdehnen; insbesondere wäre vielleicht die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 4. Ordnung (I. oder II. Art) einer Untersuchung wert. Die Annahme einer Raumkurve 3. Ordnung ist jedoch dadurch ausgezeichnet, daß sie eine *eindeutige* Abbildung vermittelt. Für den Bündelgrad h einer irreduziblen algebraischen Raumkurve n-ter Ordnung bestehen nämlich nach *R. Sturm*[5] die Schranken

$$[{}^1/_4(n-1)^2] \leqslant h \leqslant {}^1/_2(n-1)\,(n-2),$$

wobei $[z]$ die nächste ganze Zahl $\leqslant z$ bedeutet; mit $h = 1$ ist diese Ungleichung aber nur für $n = 3$ erfüllt.

Die *konstruktive Ausweitung* des vorliegenden Abbildungsverfahrens in einem metrischen Sonderfall soll in einer zweiten Arbeit ausgeführt werden.

1. Die Sehnenkongruenz einer Raumkubik.

Gegeben sei also eine nichtzerfallende Raumkurve 3. Ordnung c, in der Folge kurz „*Zentralkurve*" genannt. Als „*Sehne*" von c wird jede Gerade angesehen, die mit c zwei Punkte gemein hat, mögen diese nun reell oder imaginär, getrennt oder zusammengerückt sein. Diese ∞^2 Sehnen, die als Projektionsstrahlen einer Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes auf eine *Bildebene* π dienen sollen, erfüllen eine Strahlkongruenz $\mathfrak{C}$ vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3. Sie werden bekanntlich aus irgend zwei Punkten von c durch kollineare Ebenenbündel projiziert[6].

Es soll nur die „allgemeine" Annahme betrachtet werden, bei welcher die drei Schnittpunkte von c und π getrennt liegen. Die Verhältnisse im Falle einer c berührenden oder oskulierenden Bildebene π würden

---

[3] *W. Mayer*, Flächen 3. Ordnung. Enz. d. math. Wiss. III C, 1474.

[4] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II, Stuttgart 1907 (4. Aufl.), 191.

[5] *R. Sturm*, On some new theorems on curves of double curvature. British Association for the advancement of science, London (1881), 440.

[6] *F. Seydewitz*, Lineare Konstruktion einer Kurve doppelter Krümmung. Arch. d. Math. u. Phys. Bd. 10 (1847), 203.

sich mittels eines geeigneten Grenzüberganges aus dem allgemeinen Fall leicht ableiten. Ebenso wird die Möglichkeit einer zerfallenden Zentralkurve c, die zu unschwer zu übersehenden Ausartungen der Abbildung Anlaß gibt, beiseite gelassen. Auch auf Realitätsverhältnisse wird grundsätzlich keinerlei Rücksicht genommen.

Zur rechnerischen Behandlung bedienen wir uns eines projektiven Koordinatensystems x_1, x_2, x_3, x_4, dessen Grundpunkte A_1 $(1:0:0:0)$, $A_2(0:1:0:0)$, $A_3(0:0:1:0)$ mit den vorhin genannten Bildspurpunkten der Zentralkubik zusammenfallen sollen; als vierten Grundpunkt wählen wir den bezüglich A_1 und A_2 zu A_3 harmonischen Kurvenpunkt $A_4(0:0:0:1)$. Die Kubik c kann dann auf jeden Fall angesetzt werden durch

$$x_i = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i t^2 + \delta_i t^3 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1.1}$$

wobei wir noch fordern dürfen, daß den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 der Reihe nach die Parameterwerte $t = 1, -1, 0, \infty$ zukommen sollen. Dies führt auf die folgenden 12 Bedingungen für die 16 Koeffizienten:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \beta_3 = \gamma_4 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$$
$$\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \gamma_3 = \beta_4 + \delta_4 = 0.$$

Nach passender Festsetzung des Koordinateneinheitspunktes nehmen die Gleichungen der Zentralkubik c schließlich die einfache Gestalt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t(1+t) : t(1-t) : (1-t^2) : t(1-t^2) \tag{1.2}$$

an.

Irgend eine Ebene σ des Bündels A_4, angesetzt durch

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \tag{1.3}$$

schneidet c außer in A_4 noch in zwei Punkten S_1, S_2, deren Parameterwerte sich gemäß (1.2) aus der Gleichung

$$u_3 + (u_1 + u_2) t + (u_1 - u_2 - u_3) t^2 = 0 \tag{1.4}$$

berechnen. Analog bestimmen sich die Restschnittpunkte einer Ebene σ' des Bündels A_3

$$u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_4' x_4 = 0 \tag{1.5}$$

aus

$$(u_1' + u_2' + u_4') + (u_1' - u_2') t - u_4' t^2 = 0. \tag{1.6}$$

Diese Punkte sind mit S_1, S_2 identisch, wenn — auf Grund des Koeffizientenvergleichs zwischen (1.4) und (1.6) —

$$u_1' = u_1, \; u_2' = -u_2, \; u_4' = -u_1 + u_2 + u_3. \tag{1.7}$$

Diese Gleichungen legen die erwähnte, durch die Sehnen von c vermittelte *kollineare Beziehung zwischen den Bündeln* $A_4(\sigma)$ und $A_3(\sigma')$ fest.

Die Plückerschen Strahlkoordinaten p_{ik} der Sehne $s = S_1 S_2 = \sigma\sigma'$ ergeben sich als Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_2 & 0 & -u_1 + u_2 + u_3 \end{pmatrix}.$$

Unter Benützung der Parameter

$$u = u_1 : u_3, \quad v = u_2 : u_3 \tag{1.8}$$

lauten sie

$$\begin{array}{lll} p_{12} = 1 - u + v, & p_{13} = -v(1 - u + v), & p_{14} = v, \\ p_{34} = -2uv, & p_{42} = -u, & p_{23} = u(1 - u + v). \end{array} \tag{1.9}$$

Damit steht eine bequeme *Parameterdarstellung der Sehstrahlkongruenz* $\mathfrak{S}$ zu Verfügung.

2. Abbildung der Raumpunkte.

Um den durch einen Raumpunkt $P(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ gehenden Sehstrahl s zu ermitteln, suchen wir zusammengehörige Bündelebenen σ, σ' auf, die P enthalten. Zufolge (1.3), (1.5), (1.7) und (1.8) gilt dann

$$u x_1 + v x_2 + x_3 = 0$$

$$u x_1 - v x_2 - (u - v - 1) x_4 = 0.$$

Hieraus berechnen sich die Sehnenparameter mit

$$\begin{aligned} u &= (x_2 x_3 + x_2 x_4 - x_3 x_4) : (x_1 x_4 + x_2 x_4 - 2 x_1 x_2) \\ v &= (x_1 x_3 - x_1 x_4 - x_3 x_4) : (x_1 x_4 + x_2 x_4 - 2 x_1 x_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Der Spurpunkt einer Geraden p_{ik} in der Bildebene $\pi(x_4 = 0)$ besitzt die Koordinaten

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = p_{14} : p_{24} : p_{34} \tag{2.2}$$

und dies ergibt speziell für einen Sehstrahl

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = v : u : -2uv = \frac{1}{u} : \frac{1}{v} : -2 \tag{2.3}$$

oder unter Verwendung von (2.1):

$$= \frac{\xi_1}{x_2 x_3 + x_2 x_4 - x_3 x_4} : \frac{\xi_2}{x_1 x_3 - x_1 x_4 - x_3 x_4} : \frac{\xi_3}{2 x_1 x_2 - x_1 x_4 - x_2 x_4} \tag{2.4}$$

Diese *Gleichungen der Sehnenprojektion* zeigen, daß es sich um eine *Abbildung 4. Grades* handelt, die jedem Dingpunkt $P(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ i. a. genau einen Bildpunkt $P^s(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : 0)$ zuweist. Diese Zuordnung ist offenbar nur dann nicht eindeutig, wenn der Sehstrahl in der Bildebene liegt oder wenn durch den abzubildenden Punkt mehrere Sehstrahlen gehen. Im ersten Fall handelt es sich um Punkte auf den Seiten des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$; für einen derartigen Dingpunkt Q, etwa auf $A_2 A_3$ ($x_1 = x_4 = 0$), fällt der Sehstrahl mit $A_2 A_3$ zusammen und der Bildpunkt Q^s wird unbestimmt auf $A_2 A_3 (\xi_1 = 0)$. Im zweiten Fall handelt es sich um einen der Zentralkurve c angehörenden Dingpunkt R; durch diesen geht ein ganzer Kegel 2. Ordnung von Sehnen und der Bildpunkt R^s wird unbestimmt auf der Spurkurve dieses Sehnenkegels, d. i. ein *Umkegelschnitt* von $A_1 A_2 A_3$. Ist t_0 der zu R auf c gehörige (feste) Parameterwert, t jener eines veränderlichen Punktes S, dann ergibt sich nach Berechnung der Plückerkoordinaten des Sehne RS gemäß (1.2) und (2.2) zunächst die folgende Parameterdarstellung des Bildkegelschnittes R^s:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{-1}{(1-t_0)(1-t)} : \frac{1}{(1+t_0)(1+t)} : \frac{1}{t_0 t}. \tag{2.5}$$

Elimination von t führt dann auf eine parameterfreie Darstellung

$$2(1-t_0^2)\,\xi_1\,\xi_2 - t_0(1-t_0)\,\xi_1\,\xi_3 - t_0(1+t_0)\,\xi_2\,\xi_3 = 0. \tag{2.6}$$

Der Sehnenkegel durch R berührt die Tangentenfläche der Zentralkubik, eine Torse 3. Klasse und 4. Ordnung, der Kegelschnitt (2.6) berührt daher die Spurkurve dieser Torse in der Bildebene, eine *rationale Kurve 4. Ordnung* q mit Spitzen in den Punkten A_1, A_2, A_3; sie soll i. f. „*Grenzquartik*" heißen.

Für die Tangenten der Zentralkurve besitzt die Gleichung (1.4) eine Doppelwurzel, d. h. es ist

$$(u+v)^2 - 4(u-v-1) = 0;$$

diese Gleichung bestimmt mit (1.9) zusammen die Tangentenfläche der Zentralkurve, und für die Spurkurve q gilt nach (2.2):

$$(\xi_1\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3)^2 + 8\,\xi_1\,\xi_2\,(\xi_2\,\xi_3 - \xi_1\,\xi_3 + 2\,\xi_1\,\xi_2) = 0. \tag{2.7}$$

Es erweist sich als zweckmäßig, das Feld der Sehnenprojektionen P^s noch einer *quadratischen Transformation* T zu unterwerfen, die das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ zum Fundamentaldreieck hat und etwa durch

$$\xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^* = \frac{1}{\xi_1} : \frac{1}{\xi_2} : \frac{1}{\xi_3} = \xi_2\,\xi_3 : \xi_3\,\xi_1 : \xi_1\,\xi_2 \qquad (2.8)$$

gegeben sei. Einem Raumpunkt $P(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ wird auf diese Weise ein neuer Bildpunkt P^* in einer Ebene π^* zugeordnet, dessen Koordinaten zufolge (2.4) und (2.8) durch

$$\begin{aligned} &\xi_1^* \quad : \quad \xi_2^* \quad : \quad \xi_3^* \quad = \\ &= 2(x_2\,x_3 + x_2\,x_4 - x_3\,x_4) : 2(x_1\,x_3 - x_1\,x_4 - x_3\,x_4) : (2\,x_1 x_2 - x_1\,x_4 - x_2\,x_4) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

bestimmt sind. Diese Abbildung ist nach wie vor i. a. *eindeutig*, jedoch nur mehr *quadratisch*, also einfacher als die Sehnenprojektion. Eindeutigkeit besteht jetzt auch für die vorhin genannten Ausnahmspunkte Q, während für Dingpunkte R auf der Zentralkubik wieder Unbestimmtheit des Bildpunktes eintritt: R^* ist unbestimmt auf der aus dem Kegelschnitt (2.6) hervorgehenden Geraden

$$t_0(t_0 + 1)\,\xi_1^* - t_0(t_0 - 1)\,\xi_2^* + 2(t_0^2 - 1)\,\xi_3^* = 0. \qquad (2.10)$$

Diese Geraden sind die Tangenten jenes Inkegelschnittes q^* von $A_1 A_2 A_3$, welcher aus der dreispitzigen Grenzquartik q hervorgeht; dieser „*Grenzkegelschnitt*" q^* wird zufolge (2.7) dargestellt durch

$$(\xi_1^* + \xi_2^*)^2 + 8\,\xi_3^*\,(\xi_1^* - \xi_2^* + 2\,\xi_3^*) = 0. \qquad (2.11)$$

Zwischen den Punkten R der Zentralkubik c und den Tangenten R^* des Kegelschnittes q^* besteht naturgemäß eine *projektive Beziehung* — ausgedrückt durch (2.10) —, und diese gestattet eine andere Deutung der Abbildung $P \to P^*$: Ist RS die durch den Dingpunkt P gehende Sehne von c, dann ergibt sich der Bildpunkt P^* im Schnitt der Tangenten R^* und S^* von q^*.

Diese *quadratische Abbildung* der Raumpunkte auf die Punkte des Feldes π^*, die hier aus der Sehnenprojektion gewonnen wurde, hat, allerdings als abstrakte Zuordnung definiert, bereits *Th. Reye* verwendet, um die Theorie der „konjugierten Sehnen" einer Kubik zu entwickeln[4]. Zwei Sehnen p_1 und p_2 von c heißen dabei „konjugiert", wenn ihre Endpunktepaare R_1, S_1 und R_2, S_2 harmonisch liegen; dies überträgt sich vermöge der erwähnten Projektivität auf die Tangentenpaare R_1^*, S_1^* und R_2^*, S_2^* des Kegelschnittes q^*, so daß die Bildpunkte p_1^* und p_2^* der betrachteten Sehnen konjugiert bezüglich q^* (im Sinne der Polarentheorie) sind. Damit läßt sich die Theorie der konjugierten Sehnen einheitlich und durchsichtig darstellen.

3. Abbildung linearer Komplexe und gerader Linien.

Bei der Abbildung eines Strahlkomplexes wird man zunächst alle im Komplex enthaltenen Sehstrahlen mit der Bildebene zum Schnitt bringen; liegt speziell ein *Strahlgebüsch* vor, so erhält man auf diese Weise die Sehnenprojektion g^s einer *Geraden* g.

Alle Strahlen, die einem *linearen Komplex* $\mathfrak{G}$ und der Kongruenz $\mathfrak{C}$ gemeinsam sind, erfüllen eine gewisse *Strahlfläche* Γ, die, weil $\mathfrak{C}$ den Bündelgrad 1 und den Feldgrad 3 hat, i. a. von 4. *Grad* ist. Sie besitzt die Zentralkurve c als Doppelkurve, da der Kegel der von einem Kurvenpunkt ausstrahlenden Sehnen mit dem Komplexstrahlbüschel dieses Punktes zwei Geraden gemein hat. Ihre Doppeltorse ist die bezüglich $\mathfrak{G}$ polare Fläche der Zentralkurve — eine irreduzible Torse 3. Klasse —, so daß die Fläche 4. Grades Γ nach der *Sturm*schen Einteilung zur *III. Art* gehört[7]. Liegt speziell ein *Strahlgebüsch* vor, dessen Trägergerade g die Zentralkurve c nicht trifft, so ist c Doppelkurve und g einfache Leitgerade der projizierenden Fläche Γ, während sich ihre Doppeltorse auf das dreifach zu zählende Ebenenbüschel um g reduziert. Diese spezielle Strahlfläche 4. Grades ist daher von *IV. Art*[7].

Die *Sehnenbilder* der Komplexe sind die Schnittkurven der genannten projizierenden Flächen 4. Grades mit der Bildebene, also *rationale Quartiken* mit Doppelpunkten in den Punkten $A_1\, A_2\, A_3$. Ist ein linearer Komplex $\mathfrak{G}$ durch die Gleichung

$$a_1\, p_{12} + a_2\, p_{13} + a_3\, p_{14} + a_4\, p_{34} + a_5\, p_{42} + a_6\, p_{23} = 0 \qquad (3.1)$$

gegeben — wobei für den Fall eines Gebüsches

$$a_1\, a_4 + a_2\, a_5 + a_3\, a_6 = 0 \qquad (3.2)$$

gilt — und setzt man für die p_{ik} die Werte (1.9) ein, so erhält man die im Komplex enthaltenen Sehstrahlen. Die Bildkurve in $\pi(x_4 = 0)$ besitzt dann wegen (2.2) die Gleichung

$$\begin{aligned}(2\,\xi_1\,\xi_2 - \xi_1\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3)\,(2\,a_1\,\xi_1\,\xi_2 + a_2\,\xi_1\,\xi_3 - a_6\,\xi_2\,\xi_3) - \\ - 2\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,(a_3\,\xi_1 + a_5\,\xi_2 + a_4\,\xi_3) = 0.\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Anwendung der Transformation T (2.8) vermittelt schließlich den *Übergang zum Reyeschen Bildfeld* π^*, wo dem Komplex $\mathfrak{G}$ der Kegelschnitt $\mathfrak{G}^*$

[7] *E. Müller — J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III, Leipzig-Wien (1931), 269.

$$(2\,\xi_3^* - \xi_2^* + \xi_1^*)\,(2\,a_1\,\xi_3^* + a_2\,\xi_2^* - a_6\,\xi_1^*) -$$
$$- 2\,(a_3\,\xi_2^*\,\xi_3^* + a_5\,\xi_1^*\,\xi_3^* + a_4\,\xi_1^*\,\xi_2^*) = 0 \qquad (3.4)$$

entspricht.

Die Gleichung (3.4) lehrt, daß die ∞^5 linearen Komplexe des Raumes sich eineindeutig auf die ∞^5 Kegelschnitte der Ebene π^* abbilden. Jene Kegelschnitte, die Bilder von *Raumgeraden* (also singulären Komplexen) sind, müssen noch die Bedingung (3.2) erfüllen, deren geometrischer Inhalt nun untersucht werden soll.

Jede Ebene durch die Gerade g enthält drei Sehnen der Zentralkurve, deren der Quartik g^3 angehörende Bildpunkte auf einer Geraden, der Spur dieser Ebene liegen. Je zwei dieser Sehnen gehen von einem Punkt der Zentralkurve aus, ihre Bildpunkte gehören daher jeweils einem Kegelschnitt an, der durch die Punkte A_1, A_2, A_3 geht und die Grenzquartik q berührt. Die durch Ausübung der quadratischen Transformation T erhaltenen, dem Kegelschnitt q^* angehörenden *Reyeschen* Bildpunkte dieser drei Sehnen liegen somit paarweise auf einer Tangente des Kegelschnittes q^*; das Dreieck der Bildpunkte ist also g^* eingeschrieben und q^* umgeschrieben. Diese Überlegung gilt für jede Ebene durch g, d. h. es gibt unendlich viele Dreiecke, die dem Kegelschnitt g^* ein- und dem Kegelschnitt q^* umgeschrieben sind; g^* ist somit ein *Schließungskegelschnitt* zu q^*. Die gemeinsamen Tangenten von g^* und q^* sind die Bilder der Kuspidalpunkte der projizierenden Fläche Γ durch g. Umgekehrt gehört — wie sich aus einer Abzählung ergibt — zu jedem Schließungskegelschnitt g^* zu q^* eine Raumgerade g, deren Bild g^* ist. — Es gilt mithin der wichtige, im wesentlichen schon bei *W. Mayer*[3] zu findende Satz:

Die linearen Komplexe werden eineindeutig auf die Kegelschnitte der Reyeschen Bildebene π^* abgebildet; liegt ein Gebüsch um eine allgemeine Gerade vor, so ist das Bild ein Schließungskegelschnitt jenes Kegelschnittes q^*, der von den Bildpunkten der Tangenten der Zentralkurve erfüllt wird.

Zerfall des Reyeschen Bildkegelschnittes g^* einer Geraden g tritt ein, wenn diese mit der Zentralkurve c einen oder zwei Punkte gemein hat, da sich die Bildgeraden dieser Ausnahmspunkte abspalten. Im ersten Fall — g einfache Treffgerade von c — besteht g^* aus einer Tangente von q^* und einer eigentlichen Bildgeraden allgemeiner Lage, während im zweiten Fall — g Sehne von c — beide Bestandteile Tangenten von q^* sind, deren Schnitt den eigentlichen Bildpunkt von g darstellt.

Eine gewisse *Besonderheit* liegt ferner vor, wenn die Gerade g einer Schmiegebene der Zentralkubik c angehört, weil sie dann die Tangentenfläche von c berührt, was zur Folge hat, daß zwei Schnittpunkte von g^* und q^* zusammenrücken: Es tritt somit Berührung zwischen g^* und q^* ein. Liegt g in *zwei* Schmiegebenen von c („Achse"), dann besteht sogar Doppelberührung zwischen g^* und q^*.

Der Gedanke, den Strahlraum (∞^4 Strahlen) auf das System der Schließungskegelschnitte zu einem festen Kegelschnitt (∞^4 Kegelschnitte) abzubilden, findet sich zuerst in einer Bemerkung von *L. Cremona* in einem Brief an *E. Beltrami*[8] und wurde von *P. Aschieri*[9] dadurch konkretisiert, daß er zwei zueinander kollineare Bündel, die die Sehnenkongruenz einer Raumkubik erzeugen, korrelativ auf ein Punktfeld bezieht. Diese abstrakt definierte Zuordnung verwendet dann auch *Th. Reye* in[4]. In der vorliegenden Arbeit nun wird eine Realisation des *Cremona*schen Gedankens aus der Sehnenprojektion heraus gewonnen.

4. Abbildungen von Strahlmannigfaltigkeiten.

Die Reyesche Abbildung irgendwelcher *Strahlgebilde* des Raumes auf die Ebene π^* führt zu gewissen Mannigfaltigkeiten von Schließungskegelschnitten, wofür einige typische Beispiele angeführt seien.

Die ∞^2 Strahlen einer *Ebene* allgemeiner Lage treffen drei Sehnen der Zentralkurve, ihre Bilder in der Ebene π^* erfüllen daher ein *Kegelschnittnetz* mit einem Grundpunktedreieck, das dem Kegelschnitt q^* umschrieben ist. Berührt bzw. oskuliert die Ebene die Zentralkurve, so rücken die Grundpunkte des Kegelschnittnetzes in entsprechender Weise zusammen. Es gilt ferner:

Zwei Raumgeraden schneiden sich genau dann, wenn ihre Reyeschen Bildkegelschnitte ein Umdreieck von q^* gemeinsam haben. Ihr vierter Schnittpunkt ist das Bild des Schnittpunktes der beiden Raumgeraden.

Ein *Strahlbüschel* des Raumes bildet sich auf ein *Büschel* von Schließungskegelschnitten zu q^* ab, wobei drei von den vier Grundpunkten ein Umdreieck von q^* bestimmen, ein *Strahlbündel* auf ∞^2 Schließungskegelschnitte durch einen Punkt.

[8] Brief vom 11. 1. 1872, abgedruckt in Giornale di Matematiche 10 (Neapel 1872), 47—48.

[9] *F. Aschieri*, Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche in un piano. Rendiconti dell'Istituto Lombardo Ser. II, 12 (1879), 265—269.

In der Sehnenkongruenz $\mathfrak{C}$ sind *Flächen 2. Grades* enthalten; die Kegel unter ihnen haben ihre Spitzen auf der Zentralkurve c und bilden sich auf die Tangenten von q^* ab. Eine in $\mathfrak{C}$ enthaltene windschiefe Strahlschar 2. Grades enthält die Zentralkurve und schneidet die Bildebene in einem Kegelschnitt, der durch die Punkte A_1, A_2, A_3 geht. Umgekehrt bilden die Sehnen der Zentralkurve, die einen solchen Kegelschnitt treffen, eine in $\mathfrak{C}$ enthaltene Strahlfläche 2. Grades. Durch Anwendung der Transformation T ergibt sich:

Die in der Sehnenkongruenz $\mathfrak{C}$ enthaltenen Flächen 2. Grades bilden sich in eineindeutiger Weise auf die Geraden der Ebene ab, wobei den Kegeln die Tangenten des Grenzkegelschnittes q^* entsprechen.

Die Zuordnung zwischen den Sehnen auf einer solchen Quadrik und den Punkten der Bildgeraden ist dabei natürlich *projektiv*.

Die Geraden von π^* schreiben sich in der Form

$$a_1 \xi_1^* + a_2 \xi_2^* + a_3 \xi_3^* = 0 \tag{4.1}$$

und daraus erhält man unter Verwendung von (2.8) die Gleichung aller ∞^2 durch c gehenden Flächen 2. Grades:

$$\begin{aligned} &2 a_3 x_1 x_2 + 2 a_2 x_1 x_3 - (2 a_2 + a_3) x_1 x_4 + \\ &+ 2 a_1 x_2 x_3 + (2 a_1 - a_3) x_2 x_4 - 2 (a_1 + a_2) x_3 x_4 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Erfüllen die Koeffizienten a_i die Berührbedingung von (2.11)

$$4 a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_2 a_3 = 0, \tag{4.3}$$

so liegt ein Kegel 2. Grades vor.

Nunmehr läßt sich das Reyesche Bild l^* einer *algebraischen Raumkurve n-ter Ordnung* l einfach beurteilen. Die Anzahl der Schnittpunkte von l^* mit einer beliebigen Geraden g^* der Bildebene ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von l mit der zu g^* gehörigen Sehnenquadrik, also gleich $2n$: Die Ordnung der (vollständigen) algebraischen Bildkurve l^* ist mithin $2n$. Zu beachten ist allerdings, daß allfällige gemeinsame Punkte von l und c einen Zerfall von l^* bewirken, da sich die diesen Ausnahmspunkten entsprechenden Tangenten von q^* abspalten. So ist beispielsweise das eigentliche Reyesche Bild eines Kegelschnittes l, der die Zentralkubik zweimal trifft, wieder ein Kegelschnitt.

Um den *Umriß einer Fläche* Φ zu bestimmen, hat man alle Tangenten von Φ aufzusuchen, die der Sehstrahlkongruenz $\mathfrak{C}$ angehören. Zu diesem Zweck legt man aus den Punkten der Zentralkubik c die Tangentenkegel an Φ und bringt diese mit den durch die Punkte von c gehenden Sehnenkegel zum Schnitt.

Das Bild Φ^* im Reyeschen Bildfeld π^* des scheinbaren Umrisses Φ^s einer *algebraischen Fläche r-ten Ranges*[10] Φ hat mit einer beliebigen Geraden g^* soviele Schnittpunkte gemeinsam, als Strahlen der zu g^* gehörigen Sehnenquadrik im Tangentenkomplex von Φ enthalten sind. Dieser Komplex ist von r-tem Grad und hat daher $2r$ Strahlen mit der Quadrik gemeinsam (außer die Strahlschar ist ganz im Komplex enthalten)[11]. Φ^* ist daher eine Kurve $2r$-ter Ordnung, der scheinbare Umriß Φ^s selbst eine Kurve $4r$-ter Ordnung mit $2r$-fachen Punkten in A_1, A_2, A_3. Das Reyesche Bild einer Quadrik beispielsweise, die die Zentralkubik nicht enthält, ist daher eine Kurve 4. Ordnung.

5. Anwendung der Abbildungsgesetze.

Die Zuordnung zwischen den Raumgeraden und den Schließungskegelschnitten von q^* in π^* kann dazu Verwendung finden, aus Lagebeziehungen von Raumgeraden solche über Schließungskegelschnitte und umgekehrt abzuleiten. Dieses *Übertragungsprinzip* soll an einigen einfachen Beispielen demonstriert werden.

Vier Sehnen aus der Kongruenz $\mathfrak{C}$ besitzen i. a. genau zwei Treffgeraden, die sich als Schließungskegelschnitte durch die vier Bildpunkte der Sehnen abbilden, d. h.

Durch vier Punkte der Ebene gehen i. a. genau zwei Schließungskegelschnitte eines gegebenen.

Zwei Ebenen des Raumes besitzen eine Schnittgerade. Die Übertragung in das Feld π^* liefert:

Die Ecken zweier Umdreiecke eines Kegelschnittes liegen stets auf einem Kegelschnitt.

Drei Ebenen des Raumes, die keinem Büschel angehören, haben stets einen Schnittpunkt:

Drei Umdreiecke eines Kegelschnittes, die nicht einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, besitzen paarweise je einen Umkegelschnitt; die so bestimmten drei Kegelschnitte haben stets einen Punkt gemeinsam.

Durch Abbildung einfacher Raumgebilde erhält man Konfigurationen von Schließungskegelschnitten. So erhält man z. B. durch *Abbildung eines Tetraeders* eine Figur aus vier Umdreiecken von q^* und den sechs durch je zwei dieser Dreiecke bestimmten Kegelschnitten. Denkt man

[10] Unter dem Rang einer algebraischen Fläche versteht man die Ordnung der ihr umschriebenen Kegel.

[11] *R. Sturm*, Liniengeometrie I, Leipzig 1892, 44.

sich das Tetraeder von einem Basisdreieck aus aufgebaut, so zieht das in der Bildebene folgende Aussage nach sich:

Umschreibt man einem Umdreieck eines Kegelschnittes drei Schließungskegelschnitte und schreibt jedem von diesen ein Umdreieck des gegebenen Kegelschnittes ein, so bestimmen diese drei Umdreiecke paarweise je einen Kegelschnitt; die so bestimmten drei Kegelschnitte haben stets einen gemeinsamen Punkt.

Jeder Schließungskegelschnitt von q^* hat mit q^* vier Punkte gemeinsam, die Bilder von Tangenten der Zentralkubik sind: *Der Rang einer Kubik ist vier*[12].

Umschreibt man dem Kegelschnitt q^* alle Dreiecke, die einem seiner Schließungskegelschnitte eingeschrieben sind, so bestimmen ihre Seiten unter allen Tangenten von q^* eine kubische Involution. Diese Tangenten sind die Bilder der Punkte der Zentralkubik:

Punktetripel auf einer Raumkubik bilden genau dann eine kubische Involution, wenn die Ebenen, die durch die Punkte solcher Tripel bestimmt sind, ein Büschel bilden[13].

Das Erzeugnis dieser kubischen Involution ist dann die projizierende Fläche durch die Trägergerade des Büschels.

Unsere Abbildung stellt eine Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Sehnen der Zentralkubik bzw. den Geraden der Ebene und den in der Sehnenkongruenz $\mathfrak{C}$ enthaltenen Strahlscharen 2. Grades her, wobei den Tangenten von q^* die in $\mathfrak{C}$ enthaltenen Kegel entsprechen. Durch dieses Übertragungsprinzip kann eine *projektive Geometrie der Sehnenkongruenz* einer Kubik definiert werden, die die Inzidenzaxiome einer ebenen Geometrie erfüllt, also z. B.: Durch zwei Sehnen einer Kubik ist genau eine in der Sehnenkongruenz der Kubik enthaltene Strahlschar 2. Grades bestimmt. Je zwei solche Strahlscharen haben genau eine Sehne der Kubik gemeinsam.

Für je vier Erzeugenden einer Strahlschar bzw. für je vier Strahlscharen durch eine feste Sehne kann dann ein Doppelverhältnis definiert werden usw. Natürlich ist in dieser Geometrie auch ein Dualitätsprinzip gültig.

Als Beispiele mögen die Sätze von *Brianchon* und *Pascal* formuliert werden:

---

[12] *O. Staude*, Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme. Enz. d. math. Wiss. III, C2, 229.

[13] *E. Müller — J. Krames*, a. a. O., 257.

Gegeben sind sechs numerierte Punkte einer Kubik c; legt man durch je zwei gegenüberliegende Sehnen in diesem windschiefen Sechseck eine Strahlschar 2. Grades aus $\mathfrak{C}$, *so haben die drei Strahlscharen eine Sehne von c gemeinsam.*

Durch Dualisieren entsteht:

Gegeben sind sechs numerierte Tangenten einer Kubik c; je zwei aufeinanderfolgende Tangenten bestimmen eine Strahlschar 2. Grades aus $\mathfrak{C}$ *und je zwei gegenüberliegende Strahlscharen haben eine Sehne von c gemeinsam. Diese drei Sehnen gehören einer Strahlschar 2. Grades aus* $\mathfrak{C}$ *an.*

Angedeutet wurde diese Idee schon in einer Arbeit von *S. Jolles*[14], der eine *Polarentheorie* in der Sehnenkongruenz einer Raumkubik unter Verwendung obiger Grundelemente definiert und vor allem zeigt, daß dabei die Kubik selbst als Inzidenzkurve fungiert, eine Tatsache, die aus unserer Abbildung sofort erhellt. Es ist ein Leichtes, die Grundsätze seiner Polarentheorie durch Rücktransformation der Grundsätze der Polarentheorie des Grenzkegelschnittes q^* zu erhalten, wie im einzelnen hier nicht ausgeführt werden kann.

6. Gewinde und Gewindebüschel.

Die Gewinde $\mathfrak{G}$ des Raumes bilden sich gemäß Abschnitt 3 auf die Kegelschnitte $\mathfrak{G}^*$ der Ebene π^* ab; diese Abbildung soll nun etwas weiter verfolgt werden.

Reziproke Polare eines Gewindes $\mathfrak{G}$ sind dadurch gekennzeichnet, daß alle Gewindestrahlen, die die eine schneiden, auch die andere treffen; unter diesen gibt es vier Strahlen aus der Kongruenz $\mathfrak{C}$, deren Bildpunkte auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{G}^*$ liegen müssen, d. h.

Reziproke Polare eines Gewindes $\mathfrak{G}$ *bilden sich in* π^* *als Schließungskegelschnitte von* q^* *ab, deren vier Schnittpunkte auf dem Bildkegelschnitt* $\mathfrak{G}^*$ *des Gewindes liegen.*

Ist speziell ein *Sehstrahl* gegeben, so liegen je zwei der vier Sehstrahlen, die auch seine reziproke Polare treffen, auf einem der beiden Sehnenkegel, die von seinen Schnittpunkten mit der Zentralkubik ausstrahlen. Die Abbildung liefert:

Das Bild der reziproken Polaren eines Sehstrahles ist ein Schließungskegelschnitt durch jene vier Punkte, in denen $\mathfrak{G}^*$ *die aus dem Bildpunkt des Sehstrahles an den Kegelschnitt* q^* *legbaren Tangenten schneidet.*

---

[14] *S. Jolles,* Eine neue Polarentheorie der Raumkurven 3. Ordnung. MZ 5 (Berlin 1919), 169—185.

Da durch das Gewinde die reziproke Polare eindeutig bestimmt ist, ergibt sich nebenbei:

Liegen von vier Punkten je zwei auf einer Tangente eines Kegelschnittes, so bestimmen sie nur einen Schließungskegelschnitt des gegebenen.

Die *Nullstrahlen* des Gewindes sind dadurch charakterisiert, daß sie mit ihren reziproken Polaren zusammenfallen. Ihre Reyeschen Bildkegelschnitte treffen somit $\mathfrak{G}^*$ in einem solchen Punktequadrupel, durch das es nur *einen* Schließungskegelschnitt zu q^* gibt (wobei die in obigem Satz ausgesprochene spezielle Lage der vier Punkte nicht zulässig ist).

Die Nullebene ε eines Raumpunktes E wird von den reziproken Polaren zweier Geraden durch E aufgespannt; deren Bildkegelschnitte haben ein Umdreieck von q^* gemeinsam, das Bild der Nullebene dieses Punktes. Die Aufgabe, zu einer Ebene ε den Nullpunkt E zu finden, geht durch sinngemäße Umkehrung vor sich.

Die Tangenten der Zentralkubik c sind selbst in einem bestimmten Gewinde $\mathfrak{H}$ enthalten, in dem jeder Sehne von c eine ihrer „Achsen" zugeordnet wird. Die Tangenten sind die projizierenden Gewindestrahlen und bilden $\mathfrak{H}$ auf den Grenzkegelschnitt q^* ab. Auf diesen Fall wird im Rahmen der konstruktiven Behandlung zurückgekommen.

Die ∞^1 Gewinde, die ein Netz gemeinsam haben, bilden ein *Gewindebüschel*. Die Reyeschen Bildpunkte der vier projizierenden Netzstrahlen gehören den Bildkegelschnitten sämtlicher Gewinde des Büschels an:

Das Bild eines Gewindebüschels ist ein Kegelschnittsbüschel durch die Bildpunkte des Trägernetzes.

Den zerfallenden Kegelschnitten entsprechen dabei Gewinde, die mit der Sehnenkongruenz $\mathfrak{C}$ zwei Strahlscharen 2. Grades gemeinsam haben. In einem Gewindebüschel gibt es i. a. drei Gewinde dieser Art.

Jeder Kegelschnitt $\mathfrak{G}^*$ wird von einer Geraden des Feldes π^* in zwei Punkten geschnitten, d. h. ein Gewinde $\mathfrak{G}$ hat mit einer in der Kongruenz $\mathfrak{C}$ enthaltenen Strahlschar 2. Grades i. a. zwei Strahlen gemeinsam. Nach *Staudt* schneiden alle Kegelschnitte eines Büschels eine Gerade in Punktepaaren einer Involution und da die Abbildung der Sehstrahlen einer Quadrik aus $\mathfrak{C}$ auf die Punkte der Bildgeraden doppelverhältnistreu ist, gilt entsprechendes auch im Raum. Die Kongruenz $\mathfrak{C}$ legt nur die Abbildung fest und kann sicher so gewählt werden, daß eine gegebene Strahlschar 2. Grades in ihr enthalten ist, d. h. es gilt allgemein:

Alle Gewinde eines Büschels schneiden eine Strahlschar 2. Grades, die in keinem der Gewinde liegt, in Strahlenpaaren einer Involution.

Eine in $\mathfrak{C}$ enthaltene Strahlschar 2. Grades, die einen die vier Brennstrahlen des Netzes treffenden Sehstahl enthält, wird von jedem Gewinde des Büschels in noch einer Geraden geschnitten, d. h. die Gewinde des Büschels sind in projektiver Weise auf die Erzeugenden der Strahlschar bezogen. Im Feld π^* entspricht dem Gewindebüschel ein Kegelschnittsbüschel und der Strahlschar eine Gerade durch einen Grundpunkt des Büschels, die jeden Kegelschnitt des Büschels in noch einem Punkt schneidet:

Die Abbildung der Gewinde eines Büschels auf die Kegelschnitte eines Büschels ist projektiv.

Zwei Gewinde eines Büschels sind in „involutorischer Lage", wenn sie zu den Gebüschen des Büschels harmonisch liegen. In der Bildebene bedeutet das:

Die Bildkegelschnitte zweier involutorischer Gewinde liegen zu jenen beiden Schließungskegelschnitten von q^* harmonisch, die dem Kegelschnittsbüschel angehören.

7. Automorphe Kollineationen der Zentralkurve.

Die Zentralkurve c läßt als Raumkurve 3. Ordnung ∞^3 *automorphe Kollineationen* zu; deren Fixtetraeder sind Schmiegtetraeder der Kurve. Zu jedem Schmiegtetraeder gehört eine *kontinuierliche eingliedrige Gruppe* von automorphen Kollineationen; die Bahnkurven dieser Gruppe sind Raumkurven 3. Ordnung, die das Fixtetraeder ebenfalls als Schmiegtetraeder besitzen.

Bei diesen Kollineationen gehen Sehnen in Sehnen und mithin projizierende Strahlscharen 2. Grades wieder in solche über. Im Feld π^* entsprechen diesen Kollineationen daher lineare Punktverwandtschaften, und zwar automorphe Kollineationen des Kegelschnittes q^*. Die beiden auf q^* befindlichen Fixpunkte der Bildkollineation rühren von den bei der Raumkollineation festbleibenden Tangenten der Zentralkubik her, während der dritte Fixpunkt das Bild jener Sehne ist, die die Berührungspunkte der Fixtangenten verbindet.

Faßt man q^* als Maßkegelschnitt einer *Cayley-Klein*schen Metrik in π^* auf, so kann man sagen:

Den ∞^3 automorphen Kollineationen der Zentralkubik c entsprechen in π^* die ∞^3 nichteuklidischen Bewegungen mit q^* als Maßkegelschnitt. Die Bahnkurven jener eingliedrigen Untergruppe, die ein festes

Schmiegtetraeder der Zentralkurve als Fixtetraeder besitzt — gewisse Raumkurven 3. Ordnung —, bilden sich auf die Bahnkreise nichteuklidischer Drehungen ab. Das Zentrum der Drehung ist dabei das Bild jener Sehne der Zentralkurve, die die beiden festbleibenden Kurvenpunkte verbindet.

Dieser Zusammenhang zwischen der nichteuklidischen Geometrie der Ebene in einem projektiven Modell und der Geometrie der Sehnenkongruenz einer Raumkurve 3. Ordnung würde es erlauben, eine *Maßgeometrie* dieser Kongruenz durch Übertragung der Begriffe aus der Ebene zu definieren und so ein *räumliches Modell der ebenen nichteuklidischen Geometrie* zu konstruieren.

Über höhere kritische Determinanten von Sternkörpern.*

Von

Wolfgang Schmidt, Wien.

(Eingelangt am 27. April 1955.)

Wir betrachten abgeschlossene, um den Ursprung O symmetrische Sternkörper S im R_n. Es soll O innerer Punkt von S sein. Punktgitter seien mit Γ bezeichnet, ihre Determinante mit $d(\Gamma)$. Statt Gitterpunktpaare $(\mathfrak{G}, -\mathfrak{G})$ wollen wir im folgenden nur sagen Gitterpunkte.

Definition: Ein Gitter Γ heiße in Bezug auf S k-zulässig, falls im Inneren von S weniger als k Gitterpunkt(paar)e von Γ liegen (k natürliche Zahl).

Definition: $\Delta^k(S) = \inf d(\Gamma)$ über alle k-zulässigen Γ. Es wurde gezeigt (Auswahlsatz von Mahler!), daß dieses Infinum auch Minimum ist, das heißt, daß es ein k-zulässiges Gitter Γ_k gibt mit $d(\Gamma_k) = \Delta^k(S)$. $\Delta^k(S)$ wird k-kritische Determinante von S genannt. Statt „1-zulässig" sagen wir kurz „zulässig", statt „1-kritisch" bloß „kritisch".

Es wird vermutet[1]

$$k\,\Delta^k(S) \geqq \Delta(S) \tag{1}$$

für alle k und alle S. Bisher wurde diese Ungleichung nur für den Fall, daß k eine Primzahl ist bewiesen[1]. In diesen Zeilen soll die Ungleichung für allgemeine Klassen von Zahlen gezeigt werden.

Zunächst müssen einige Begriffe und Bezeichnungen eingeführt werden. Sei Γ ein Gitter. Ein Gitterpunkt $\mathfrak{G} \in \Gamma$ heißt primitiv, falls auf der Strecke $O\mathfrak{G}$ kein weiterer Gitterpunkt von Γ liegt. Zu jedem $\mathfrak{G} \in \Gamma$ gibt es einen primitiven Gitterpunkt $\mathfrak{G}' \in \Gamma$ und eine natürliche Zahl τ, so daß $\mathfrak{G} = \tau\mathfrak{G}'$. Diese Zahl τ hängt eindeutig von $\mathfrak{G}$ ab, wir wollen sie mit $\tau(\mathfrak{G})$ bezeichnen.

* Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung und Förderung meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *E. Hlawka*.

[1] *C. A. Rogers*: J. London math. Soc. **26**, 307 (1951).

Definition: Eine symmetrische Menge $\mathfrak{S}$ von Gitterpunkten in einem Gitter Γ heiße sternförmige Gitterpunktmenge, „st. G", falls mit $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G}) \,.\, \mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}$ auch alle Punkte $m \,.\, \mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}$, wobei $m = 1, 2, \ldots, \tau(\mathfrak{G})$. Es ist zu beachten, daß $\mathfrak{S}$ mit dem Gitter, zu dem es gehört, eng verknüpft ist.

Sei $\mathfrak{N}$ eine Menge mit endlich vielen Elementen. Dann soll $z(\mathfrak{N})$ die Zahl der Elemente von $\mathfrak{N}$ angeben. Nun sei Γ das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Definition: Sei $\mathfrak{G} \in \Gamma$, $\mathfrak{G}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, g_i ganz, m eine natürliche Zahl. Unter ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ verstehen wir die Menge der Gitterpunkte $X(x_1, x_2, \ldots x_n)$, welche die Kongruenz

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n \equiv 0 \pmod{m} \tag{2}$$

erfüllen. Aus $\mathfrak{p} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ folgt $\mathfrak{G} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{p})$ und umgekehrt. ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ bildet einen diskreten Modul aus Gitterpunkten, daher ist ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ ein Gitter. Es ist ${}_m\Gamma(\mathfrak{G}) \subseteq \Gamma$. Falls $\mathfrak{G}$ primitiv, so ist $g \,.\, g \,.\, T.(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1$. Wie man leicht überlegt, ist in diesem Falle

$$d({}_m\Gamma(\mathfrak{G})) = m\, d(\Gamma). \tag{3}$$

Definition: ${}_m\mathfrak{M}$ soll die Menge der Gitterpunkte $0 \leqq x_i < m$ bedeuten, doch soll der Ursprung O nicht dazugehören. Man hat

$$z({}_m\mathfrak{M}) = m^n - 1. \tag{4}$$

Definition: ${}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G}) = {}_m\mathfrak{M} \cap {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$. Falls $\mathfrak{G}$ primitiv, ist wegen (3)

$$z({}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = m^{n-1} - 1. \tag{5}$$

Bezeichnung: Mit V_j $(j=2, 3, 4, \ldots)$ bezeichne ich folgende allgemeine Vermutung:

Gegeben sei eine st. G. $\mathfrak{S}$ mit $z(\mathfrak{S}) < j$ in einem Gitter Γ. Dann gibt es ein Teilgitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) \leqq j\, d(\Gamma)$ und $z(\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) = 0$, d. h. $\overline{\Gamma}$ hat mit $\mathfrak{S}$ keinen Punkt gemeinsam.

Hilfssatz a: Sei V_j für $j = j_0$ bewiesen. Dann gilt $j_0\, \Delta^{j_0}(S) \geqq \Delta(S)$ für alle S.

Beweis des Hilfssatzes. Indirekt: Angenommen, es gäbe einen Sternkörper S, so daß $j_0 \,.\, \Delta^{j_0}(S) < \Delta(S)$. Sei Γ das j_0-kritische Gitter von S und $\mathfrak{S} = \Gamma \cap \dot{S}$. (Dabei bedeutet $\dot{S}$ das Innere von S). Es ist $\mathfrak{S}$ st. G. in Γ und $z(\mathfrak{S}) < j_0$. Nach V_{j_0} gibt es daher ein $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$, so daß $d(\overline{\Gamma}) \leqq j_0\, d(\Gamma) = j_0\, \Delta^{j_0}(S)$ und $z(\overline{\Gamma} \cap S) = 0$. Es ist aber $z(\overline{\Gamma} \cap \dot{S}) = z(\overline{\Gamma} \cap \Gamma \cap \dot{S}) = z(\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) = 0$ und daher $\overline{\Gamma}$ zulässig in Bezug auf S. Daher $d(\overline{\Gamma}) \geqq \Delta(S)$. Also $\Delta(S) \leqq d(\overline{\Gamma}) \leqq j_0\, \Delta^{j_0}(S)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. W. z. b. w.

Statt der Ungleichungen (1) wird man sich daher bemühen, die Vermutungen V_j zu beweisen. Eine Verschärfung der Vermutung V_j ist folgende Vermutung W_j: Sei wieder $\mathfrak{S}$ st. G. mit $z(\mathfrak{S}) < j$ in einem Gitter Γ.

Dann gibt es ein Gitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\bar{\Gamma}) = j\, d(\Gamma)$ und $z(\bar{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) = 0$.

Satz 1: *Falls k eine Primzahlpotenz ist, ist W_k richtig. Dann gilt also auch V_k und Ungleichung* (1).

Beweis von Satz 1: Sei also $\mathfrak{S}$ mit $z(\mathfrak{S}) < p^m$ st. G. in einem Gitter Γ. Wir setzen O. B. d. A. voraus, daß Γ das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten ist. Es ist zu zeigen, daß es ein Gitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$, $z(\bar{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) = 0$ mit $d(\bar{\Gamma}) = p^m\, d(\Gamma)$ gibt.

Sei $\mathfrak{S}_l$ die Menge jener $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, welche $\tau(\mathfrak{G}) = p^l$ haben und bei welchen $p \cdot \mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}$. Offenbar ist $z(\mathfrak{S}_m) = z(\mathfrak{S}_{m+1}) = \ldots = 0$. Man sieht sofort, daß

$$z(\mathfrak{S}_0) + p\, z(\mathfrak{S}_1) + p^2\, z(\mathfrak{S}_2) + \ldots + p^{m-1}\, z(\mathfrak{S}_{m-1}) \leqq z(\mathfrak{S}) < p^m. \tag{6}$$

Ist $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_l$, so ist $d({}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{G})) = p^{m-l}\, d(\Gamma)$. Man hat wegen (4) $z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}) = p^{mn} - 1$. Endlich ist

$$z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = \frac{p^{mn}}{p^{m-l}} - 1 = p^{m(n-1)}\, p^l - 1. \tag{7}$$

Wir erhalten

$$\sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0} z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1} z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + \ldots + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_{m-1}} z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) =$$

$$= p^{m(n-1)}\,(z(\mathfrak{S}_0)\, p^0 + z(\mathfrak{S}_1)\, p^1 + \ldots + z(\mathfrak{S}_{m-1})\, p^{m-1}) - (z(\mathfrak{S}_0) +$$

$$+ z(\mathfrak{S}_1) + \ldots + z(\mathfrak{S}_{m-1})) \leqq p^{m(n-1)}\, p^m - 2 < p^{mn} - 1 = z({}_{(p^m)}\mathfrak{M}).$$

wegen (6) und (7) und da man annehmen darf $z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) + \ldots + z(\mathfrak{S}_{m-1}) > 0$.

Daraus geht hervor, daß es mindestens einen Punkt $\mathfrak{p} \in {}_{(p^m)}\mathfrak{M}$ gibt, der in keinem ${}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ liegt bei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots$ oder $\mathfrak{S}_{m-1}$. Man darf annehmen, $\mathfrak{p}$ ist primitiv. (Denn falls $\mathfrak{p}$ primitiv hat $\mathfrak{p} \in {}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, so ist auch jedes Vielfache davon in ${}_{(p^m)}\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$). Das Gitter ${}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p})$ hat $d({}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p})) = p^m\, d(\Gamma)$ und ist bereits das gesuchte Gitter. Denn ${}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$. Angenommen, ${}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{O}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} \in {}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$.

Sei g. g. T. $(p^n, \tau(\mathfrak{G})) = p^\nu$. Ist $\mathfrak{G}'$ der primitive Punkt zu $\mathfrak{G}$, so liegt $p^\nu\, \mathfrak{G}' \in {}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{G})$. Es gibt ein l, so daß $p^l\, \mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_l$. Man hat $l \geqq \nu$ und $\bar{\mathfrak{G}} = p^l\, \mathfrak{G}' \in {}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{p})$. Daraus sofort $\mathfrak{p} \in {}_{(p^m)}\Gamma(\mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_l$. Das aber war gerade durch die Wahl von $\mathfrak{p}$ ausgeschlossen, Widerspruch.

Satz 2: *W_k ist richtig, falls $k = p \cdot q$ und p, q Primzahlen sind mit $q \geqq (p-1) \cdot (p-2)$.*

Für Zahlen dieser Form stimmt daher um so mehr V_k und Gleichung (1).

Bezeichnung: $p\langle m\rangle$ soll den kleinsten Primfaktor von m bedeuten. Z. B. $p\langle 14\rangle = 2$. $q\langle m\rangle$ soll den zweitkleinsten Primfaktor von m bedeuten. Z. B. $q\langle 14\rangle = 7$. $q\langle m\rangle$ wird nur auf Zahlen angewendet werden, welche keine Primzahlpotenzen sind.

Hilfssatz b. Sei $\mathfrak{S}$ st. G. in Γ mit $z(\mathfrak{S}) \leqq m$, wobei m keine Primzahlpotenz. Es soll kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = q\langle m\rangle$ geben.

Dann gibt es ein Teilgitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = m\, d(\Gamma)$ und $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$.

Beweis von Hilfssatz b. Man kann schreiben $m = (p\langle m\rangle)^\nu \cdot m'$, wobei $p\langle m'\rangle = q\langle m\rangle$. Die Mengen $\mathfrak{S}_l$ werden ähnlich wie bei Satz 1 erklärt: Es sei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_l$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ und $\tau(\mathfrak{G}) = (p\langle m\rangle)^l$, jedoch $p\langle m\rangle \cdot \mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}$.[2] Dann ist ähnlich wie (6)

$$z(\mathfrak{S}_0) + p\langle m\rangle z(\mathfrak{S}_1) + p^2\langle m\rangle z(\mathfrak{S}_2) + \ldots p^\nu\langle m\rangle z(\mathfrak{S}_\nu) \leqq z(\mathfrak{S}) \leqq m. \quad (8)$$

Ist $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_l$, so hat ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$, wenn $\mathfrak{G} = (p\langle m\rangle)^l\, \mathfrak{G}'$, die Form

$$(p\langle m\rangle)^l (g_1'\, x_1 + \ldots + g_n'\, x_n) \equiv 0 \pmod{(p\langle m\rangle)^\nu\, m'},$$

daher

$$g_1'\, x_1 + g_2'\, x_2 + \ldots + g_n'\, x_n \equiv 0 \pmod{(p\langle m\rangle)^{\nu-l}\, m'}$$

Also

$$d({}_m\Gamma(\mathfrak{G})) = (p\langle m\rangle)^{\nu-l}\, m'\, d(\Gamma) \quad (9)$$

falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_l$. Somit ist, wenn wir kurz schreiben $p\langle m\rangle = p$, $q\langle m\rangle = q$ $z({}_m\mathfrak{M}) = m^n - 1$

$$z({}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = \frac{m^n}{d({}_m\Gamma(\mathfrak{G}))} - 1 = \frac{(p^\nu\, m')^n}{p^{\nu-l}\, m'} - 1 = (p^\nu\, m')^{n-1}\, p^l - 1. \quad (10)$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{\mathfrak{G}\,\varepsilon\,\mathfrak{S}_0} z({}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G}\,\varepsilon\,\mathfrak{S}_1} z({}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + \ldots + \sum_{\mathfrak{G}\,\varepsilon\,\mathfrak{S}_\nu} z({}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) =$$

$$= (p_m^{\nu\prime})^{n-1} (z(\mathfrak{S}_0) + p\, z(\mathfrak{S}_1) + p^2 z(\mathfrak{S}_2) + \ldots + p^\nu z(\mathfrak{S}_\nu)) - (z(\mathfrak{S}_0) +$$

$$+ z(\mathfrak{S}_1) + \ldots + z(\mathfrak{S}_\nu)) \leqq (p_m^{\nu\prime})^{n-1} p^\nu\, m' - 2 < (p^\nu\, m')^n - 1 = z({}_m\mathfrak{M}).$$

wegen (8), (10) und weil man annehmen darf $z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) + \ldots + z(\mathfrak{S}_\nu) > 1$.

---

[2] $l = 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Bei $\mathfrak{S}_\nu$ fällt die letzte Bedingung weg. Es darf auch sein $p\langle m\rangle\, \mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$.

Es existiert also mindestens ein Punkt $\mathfrak{p} \in {}_m\mathfrak{M}$, der in keinem ${}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ liegt, wenn $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{\nu-1}$, oder $\mathfrak{S}_\nu$ liegt. Primitiv darf man deshalb annehmen, weil für $\mathfrak{p}$ primitiv, $\mathfrak{p} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ auch für alle Vielfachen $s\,\mathfrak{p}$ gilt $s\,\mathfrak{p} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$.

Das Gitter ${}_m\Gamma(\mathfrak{p})$ erfüllt ${}_m\Gamma(\mathfrak{p}) \subset \Gamma$, $d({}_m\Gamma(\mathfrak{p})) = m\,d(\Gamma)$. Es wird nun, ähnlich Satz 1, gezeigt, daß ${}_m\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$.

Angenommen, es wäre ${}_m\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{O}$, es wäre $\mathfrak{G} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$. Aus $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ folgt nach Voraussetzung $\tau(\mathfrak{G}) < q$. Also ist g. g. T. $(m, \tau(\mathfrak{G})) = p^{\nu'}$, wobei $\nu' \leqq \nu$. Hat $\mathfrak{G}$ also die Form $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\,\mathfrak{G}'$, so ist auch $p^{\nu'}\,\mathfrak{G}' \in {}_m\Gamma(\mathfrak{p})$. Es gibt ein l mit $\nu' \leqq l \leqq \nu$, so daß $p^l\,\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_l$. Man hat $\tilde{\mathfrak{G}} = p^l\,\mathfrak{G}' \in {}_m\Gamma(\mathfrak{p})$. Daraus folgt $\mathfrak{p} \in {}_m\Gamma(\tilde{\mathfrak{G}})$, wobei $\tilde{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_l$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{p}$.

Daher tatsächlich ${}_m\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ und ${}_m\Gamma(\mathfrak{p})$ ist das gewünschte Gitter $\overline{\Gamma}$.

Beweis von Satz 2: Sei also $\mathfrak{S}$ st. G. in Γ mit $z(\mathfrak{S}) < p\,q$, wobei p, q Primzahlen mit $q \geqq (p-1)\,.\,(p-2)$. Falls für alle $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ gilt $\tau(\mathfrak{G}) \neq q$, werden die Voraussetzungen von Hilfssatz b erfüllt und wir sind fertig. Man darf also annehmen, es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = q$. Man kann weiter voraussetzen, dieses $\mathfrak{G}$ liege auf der x_1-Achse und Γ sei das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Es gibt nun, wie ich behaupte, ein Gitter ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$ der Form

$$x_1 + a_2\,x_2 + q_3\,x_3 + \ldots + a_n\,x_n \equiv 0 \pmod{p\,q},\ [\mathfrak{A}(a_2, a_3, \ldots, a_n)] \quad (11)$$

das ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ erfüllt. Weiter ist $d({}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})) = p\,q\,d(\Gamma)$. $\mathfrak{S}'$ sei die Menge der $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, welche nicht auf der x_1-Achse liegen. Es ist $z(\mathfrak{S}') \leqq z(\mathfrak{S}) - q \leqq p\,q - q - 1 = q(p-1) - 1$. Nun seien weitere Teilmengen $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_q$ von $\mathfrak{S}'$ gebildet:

0) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G}) = 1$, $p\,\mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}$, $\mathfrak{G}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, g. g. T. $(g_2, g_3, \ldots, g_n, pq) = 1$.

1) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G}) = p$, $\mathfrak{G} = p\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv, und $q\,.\,\mathfrak{G}' \notin \mathfrak{S}$, g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', p\,q) = 1$.

2) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_2$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G}) = q$, $\mathfrak{G} = q\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv und g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = 1$.

p) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_p$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G}) = p$, $\mathfrak{G} = p\,\mathfrak{G}'$ wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv und g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n, pq) = p$.

q) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_q$, falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G}) = q$, $\mathfrak{G} = q\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv und g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = q$.

Diese Mengen sind einander fremd. Auf einem Halbstrahl liegt höchstens ein Punkt einer der Mengen. Es gilt

$$z(\mathfrak{S}_0)+p\,z(\mathfrak{S}_1)+q\,z(\mathfrak{S}_2)+p\,z(\mathfrak{S}_p)+q\,z(\mathfrak{S}_q) \leqq z(\mathfrak{S}') \leqq q(p-1)-1. \quad (12)$$

Definition: Unter ${}_{pq}\nabla(\mathfrak{G})$ verstehen wir die Menge jener ganzzahligen $X'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, welche der Kongruenz $g_1+g_2x_2+\ldots+g_nx_n \equiv 0 \pmod{pq}$ genügen. Diese Kongruenz kann auch geschrieben werden $g_2x_2+g_3x_3+\ldots+g_nx_n \equiv -g_1 \pmod{pq}$. Aus $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(\mathfrak{G})$ folgt $\mathfrak{G} \in {}_{pq}\nabla(\mathfrak{A})$ und umgekehrt.

Bezeichnung: Sei $\mathfrak{M}'$ die Menge der ganzzahligen $X'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ mit $0 \leqq x_i < pq$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Es ist $z(\mathfrak{M}') = (pq)^{n-1}$. Bezeichnung $\mathfrak{M}'(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}' \cap {}_{pq}\nabla(\mathfrak{G})$.

Ist nun

0) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0$, so g. g. T. $(g_2, g_3, \ldots, g_n, pq) = 1$. Jeder pq-te Punkt von $\mathfrak{M}'$ liegt in $\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})$. Es ist deshalb $z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \dfrac{z(\mathfrak{M}')}{pq} = (pq)^{n-2}$.

1) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$, so ist $g_2x_2+g_3x_3+\ldots+g_nx_n \equiv -g_1 \pmod{pq}$ gleichwertig mit $g_2'x_2+g_3'x_3+\ldots+g_n'x_n' \equiv -g_1' \pmod{q}$. Da g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = 1$, ist $z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \dfrac{z(\mathfrak{M}')}{q} = (pq)^{n-2}\cdot p$.

p) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_p$, so $g_2'x_2+g_3'x_3+\ldots+g_n'x_n \equiv -g_1' \pmod{q}$. Da nun g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', q)=1$, hat man $z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \dfrac{z(\mathfrak{M}')}{q} = (pq)^{n-2}\cdot p$.

q) $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_p$, dann aus analogen Gründen $z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \dfrac{z(\mathfrak{M}')}{p} = (pq)^{n-2}\cdot q$.

2) Anders gehen wir vor im Falle $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_2$. Wir verstehen dann unter $\square(\mathfrak{G})$ die Menge jener $X'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, welche mindestens eine der Kongruenzen

$$\left.\begin{matrix} p\,g_1'+p\,g_2'x_2+\ldots+p\,g_n'x_n \equiv 0\,(pq) \\ q\,g_1'+q\,g_2'x_2+\ldots+q\,g_n'x_n \equiv 0\,(pq) \end{matrix}\right\} \text{ falls } \mathfrak{G} = q\,\mathfrak{G}', \quad \mathfrak{G}' \text{ primitiv erfüllen}$$

Es ist $\square(\mathfrak{G}) = \nabla(p\,\mathfrak{G}') \cup \nabla(q\,\mathfrak{G}')$.

Es ist $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}' \cap \square(\mathfrak{G})$.

$z(\mathfrak{M}^*(\mathfrak{G})) = z(\mathfrak{M}'(p\,\mathfrak{G})) + z(\mathfrak{M}'(q\,\mathfrak{G})) - z^* = (pq)^{n-2}(p+q) - z^*$.

z^* ist die Zahl jener Punkte, welche in $\nabla(p\,\mathfrak{G}') \cap \nabla(q\,\mathfrak{G}') \cap \mathfrak{M}'$ liegen. $\nabla(p\,\mathfrak{G}') \cap \nabla(q\,\mathfrak{G}')$ ist die Menge

$$\begin{cases} g_1' + g_2' x_2 + \ldots + g_n' x_n \equiv 0 \pmod{q} \\ g_1' + g_2' x_2 + \ldots + g_n' x_n \equiv 0 \pmod{p}, \text{ somit} \end{cases}$$

$$g_2' x_2 + g_3' x_3 + \ldots + g_n' x_n \equiv -g_1' \pmod{pq}.$$

Daher ist $z^* = (pq)^{n-2}$ und $z(\mathfrak{M}^*(\mathfrak{G})) = (pq)^{n-2}(p+q-1)$.

Es besteht die Gleichung

$$A = \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_p} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_q} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_2} z(\mathfrak{M}^*(\mathfrak{G})) =$$

$$= (pq)^{n-2}[z(\mathfrak{S}_0) + pz(\mathfrak{S}_1) + qz(\mathfrak{S}_2) + pz(\mathfrak{S}_p) + qz(\mathfrak{S}_q) + (p-1)z(\mathfrak{S}_2)]. \tag{13}$$

Es ist wegen (12) $q\, z(\mathfrak{S}_q) \leqq q(p-1) - 1$ und daher $z(\mathfrak{S}_q) \leqq p-2$ und weiter wegen (13)

$$A \leqq (pq)^{n-2}[q(p-1) - 1 + (p-2)(p-1)] < (pq)^{n-2} \cdot pq = (pq)^{n-1} = z(\mathfrak{M}').$$

Es gibt daher einen Gitterpunkt $\mathfrak{A}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$, der zwar in $\mathfrak{M}'$, jedoch nicht in einem ${}_{pq}\nabla(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_p$ oder $\mathfrak{S}_q$ liegt oder in $\square(\mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_2$.

Nun behaupte ich, im Gitter ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$ mit $d({}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})) = pq\, d(\Gamma)$

$$x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n \equiv 0 \pmod{pq} \tag{11}$$

liegt kein Punkt von $\mathfrak{S}$, d. h. ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{D}$.

Angenommen, es gibt einen Punkt $\mathfrak{G}$, welcher $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{G} \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$ hat. Wäre $\mathfrak{G}$ auf der x_1-Achse, so müßte sein $x_1 \equiv 0\ (pq)$, was wegen $z(\mathfrak{S}) < pq$ nicht möglich ist. Es liegt auch kein Punkt $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$ auf dem Gitter ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$. Nehmen wir aber an, es gibt solch ein $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}'$ primitiv in Γ. Sei nun

α) $\mathfrak{G}'(g_1', g_2', \ldots, g_n')$ mit g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = 1$.

0) $p\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}'$, so ist dann $\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_0$. Daher $\tau(\mathfrak{G}) < p < q$, also g. g. T. $(\tau(\mathfrak{G}), pq) = 1$ und $\mathfrak{G}' \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$. Dies heißt $g_1' + g_2' a_2 + \ldots + g_n' a_n \equiv 0 \pmod{pq}$. Das bedeutet $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(\mathfrak{G}')$, was wegen der Wahl von $\mathfrak{A}$ nicht sein darf. [Es ist ja $\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_0$].

1. $p\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}'$, $q\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}'$. Es ist $p\mathfrak{G}' = \overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_1$. Wir haben $\tau(\mathfrak{G}) < q$, daher $(\tau(\mathfrak{G}), pq) = d$ mit $d = 1$ oder $d = p$. Es folgt $p\mathfrak{G}' \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$. Dies heißt also $\overline{\mathfrak{G}} \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$ und umgekehrt. $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(\overline{\mathfrak{G}})$. Wegen $\overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_1$ ist dies nicht erlaubt.

2. $q\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}'$. Es ist $\tau(\mathfrak{G}) < pq$, daher $(\tau(\mathfrak{G}), pq) = d$ mit $d = 1$ oder p oder q. Es ist entweder $p\mathfrak{G}' \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$ oder $q\mathfrak{G}' \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$. Daraus: Es ist $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(p\mathfrak{G}')$ oder $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(q\mathfrak{G}')$, jedenfalls $\mathfrak{A} \in \square(\overline{\mathfrak{G}})$, wobei

$\overline{\mathfrak{G}} = q\mathfrak{G}', \overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_2$. Daher $\mathfrak{A} \in \square(\overline{\mathfrak{G}}), \overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_2$, was nach Wahl von $\mathfrak{A}$ nicht sein darf.

β) $\mathfrak{G}'(g_1', g_2', \ldots, g_n')$ mit g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = p$. $g_i' = pg_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

Es ist

$$g_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + \ldots + g_n a_n \equiv 0 \pmod{pq}$$
$$\tau(\mathfrak{G})\,(g_1' + g_2' a_2 + \ldots + g_n' a_n) \equiv 0\ (pq)$$
$$\tau(\mathfrak{G})\,[(g_1) + p(g_2'' a_2 + \ldots + g_n'' a_n)] \equiv 0\ (pq),$$

daraus

$$\tau(\mathfrak{G})\ .\ g_1' \equiv 0\ (p).$$

Da

$$(g_1', p) = 1$$

hat man daher

$$\tau(\mathfrak{G}) \equiv 0\ (p),\ \tau(\mathfrak{G}) = r_1 p,$$

wobei

$$r_1 < q,\ (r_1, q) = 1$$
$$r_1 p(g_1' + g_2' a_2 + g_3' a_3 + \ldots + g_n' a_n) \equiv 0\ (pq)$$
$$p(g_1' + g_2' a_2 + g_3' a_3 + \ldots + g_n' a_n) \equiv 0\ (pq).$$

Sei $\overline{\mathfrak{G}} = p\,\mathfrak{G}'$. Es ist dann $\overline{\mathfrak{G}} \in {}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})$, also $\mathfrak{A} \in {}_{pq}\nabla(\overline{\mathfrak{G}})$, wobei $\overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_p$.

Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{A}$.

γ) $\mathfrak{G}'(g_1', g_2', \ldots, g_n')$ mit g. g. T. $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = q$. Man kommt ähnlich wie bei β) zu einem Widerspruch.

δ) $\mathfrak{G}'(g_1', g_2', \ldots, g_n')$ mit $(g_2', g_3', \ldots, g_n', pq) = pq\,.y_i' = pq\,.\,g_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

Es ist

$$g_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + \ldots + g_n a_n \equiv 0\ (pq)$$
$$\tau(\mathfrak{G})\,(g_1' + g_2' a_2 + g_3' a_3 + \ldots + g_n' a_n) \equiv 0\ (pq)$$
$$\tau(\mathfrak{G})\,(g_1' + (pq)\,(g_2'' a_2 + g_3'' a_3 + \ldots + g_n'' a_n)) \equiv 0\ (pq),$$

daraus $\tau(\mathfrak{G})\ .\ g_1' \equiv 0\ (pq)$ und wegen $(g_1', pq)=1$ $\tau(\mathfrak{G}) \equiv 0\ (pq)$. Da aber $\tau(\mathfrak{G}) < pq$ wegen $z(\mathfrak{S}) < pq$, kann dies nicht sein.

Die Annahme ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{O}$ führt daher auf einen Widerspruch. Es ist ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A}) \subset \Gamma$, ${}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$, $d({}_{pq}\Lambda(\mathfrak{A})) = pq\,d(\Gamma)$ und somit Satz 2 in allen Teilen bewiesen.

Bemerkung: In Satz 1 und 2 wurde die Vermutung W_k für spezielle Klassen von k bewiesen. Leider ist W_k für allgemeines k unrichtig. Als

einfaches Gegenbeispiel bringe ich die folgende st. G. $\mathfrak{S}$ mit $z(\mathfrak{S}) = 76 < 77 = m$ im zweidimensionalen Gitter. $\mathfrak{S}$ besteht aus:

Allen Punkten der Form ν . (1,0) mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots 11$
Allen Punkten der Form ν . (0,1) mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots 11$
Allen Punkten der Form ν . (1,1) mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots 11$
Allen Punkten der Form ν . (2,1) mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots 11$
Allen Punkten der Form ν . (3,1) mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots 11$

sowie den weiteren 21 Punkten (4,1), (5,1), (6,1), (18,1), (19,1), (20,1), (26,1), (27,1), (32,1), (39,1), (40,1), (41,1), (48,1), (53,1), (54,1), (60,1), (61,1), (62,1), (74,1), (75,1), (76,1).

Bei einem beliebigen Gitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = 7.11 = 77$ hat der primitive Gitterpunkt von $\overline{\Gamma}$ auf der x_1-Achse Koordinaten $(\gamma, 0)$, wobei γ ein Teiler von 77 ist. Es darf bei $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ nicht sein $\gamma = 1,7$ oder 11 daher $\gamma = 77$. Damit weiter $d(\overline{\Gamma}) = 77$, muß auf der Geraden $x_2 = 1$ ein Gitterpunkt von $\overline{\Gamma}$ liegen, er habe Koordinaten $(\delta, 1)$. Man darf annehmen $0 \leqslant \delta < 77$. Es darf nicht sein $\delta \equiv 0\,(7)$, $\delta \equiv 1\,(7)$, $\delta \equiv 2\,(7)$, $\delta \equiv 3\,(7)$. Wäre z. B. $\delta \equiv 1\,(7)$, $\delta = 7k + 1$, so wäre der Punkt $-k\,(77, 0) + 11\,(7k + 1, 1) = (11, 11) \in \overline{\Gamma}$. Doch ist $(11, 11) \in \mathfrak{S}$, so daß wir mit $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ einen Widerspruch erhalten. Ähnlich schließt man bei $\delta \equiv 0\,(7)$, $\delta \equiv 2\,(7)$, $\delta \equiv 3\,(7)$. Auch ist unmöglich $\delta \equiv 0\,(11)$, $\delta \equiv 1\,(11)$, $\delta \equiv 2\,(11)$, $\delta \equiv 3\,(11)$, wie analog gezeigt wird. Es bleiben noch 21 Möglichkeiten für δ, welche durch die übrigen 21 Punkte von $\mathfrak{S}$ verhindert werden.

W_{77} ist demnach unrichtig.

Satz 3: *Die Vermutung V_m ist richtig, falls $m = p + 1$ und p eine Primzahl. Dann gilt daher auch Ungleichung* (1).

Hilfssatz c. Sei $\mathfrak{S}$ st. G. in einem Gitter Γ. Unter $\tilde{\mathfrak{S}}$ verstehen wir die Menge der primitiven Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$. Es liege eine Primzahl p vor.

α) $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant p$.

β) Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = p$.

Dann gibt es ein Teilgitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = p\,d(\Gamma)$ und $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$.

Beweis des Hilfssatzes[3]. Es ist $d({}_p\Gamma(\mathfrak{G})) = pd(\Gamma)$ für $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$.

$z({}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = p^{n-1} - 1$ für $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Daher ist

$$\sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}} z({}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = (p^{n-1} - 1)\, z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant (p^{n-1} - 1)\, p < p^n - 1 = z({}_p\mathfrak{M}).$$

[3] Der Beweis geht wie bei Satz 1 und bei Anmerkung 1.

Also liegt in ${}_p\mathfrak{M}$ ein Gitterpunkt, welcher in keinem ${}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ liegt, wenn $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Es gibt sogar einen primitiven Gitterpunkt $\mathfrak{p}$ mit dieser Eigenschaft. Das Gitter ${}_p\Gamma(\mathfrak{p})$ erfüllt außer ${}_p\Gamma(\mathfrak{p}) \subset \Gamma$, $d({}_p\Gamma(\mathfrak{p})) = p\, d(\Gamma)$ auch ${}_p\Gamma(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$. Wäre nämlich $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, so $\tau(\mathfrak{G}) < p$ und bei $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\, \mathfrak{G}'$ folgt aus $\mathfrak{G} \in {}_p\Gamma(\mathfrak{p})$ sofort $\mathfrak{G}' \in {}_p\Gamma(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in {}_p\Gamma(\mathfrak{G}')$, wobei $\mathfrak{G}' \in \tilde{\mathfrak{S}}$, Widerspruch.

Beweis von Satz 3. Offenbar gilt wegen $z(\mathfrak{S}) < m = p + 1$ sofort $z(\mathfrak{S}) \leqslant p$ und

α) $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant p$. Entweder (Fall 1) gilt auch

β) Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = p$. Dann gibt es nach Hilfssatz c ein Gitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = p\, d(\Gamma) < m\, d(\Gamma)$ und $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ und wir sind fertig. Oder aber

(Fall 2) es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = p$. Dieses $\mathfrak{G}$ hat die Form $\mathfrak{G} = p\, \mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv. Man darf annehmen, Γ sei das natürliche Gitter und $\mathfrak{G}'$ habe Koordinaten $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Die Punkte von $\mathfrak{S}$ haben die Form $(\nu, 0, 0, \ldots, 0)$ mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots, p = m - 1$. Das Gitter $\overline{\Gamma}$: $x_1 \equiv 0 \pmod m$ erfüllt $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$, $d(\overline{\Gamma}) = m\, d(\Gamma)$. Es ist $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$. Aus $\mathfrak{G} \in \overline{\Gamma}$ folgt $x_1 \equiv 0 (m)$, was für die Punkte von $\mathfrak{S}$ offenbar nicht zutrifft.

Bezeichnung: Unter $[m]_p$ verstehen wir die nächst kleinere Primzahl an m.

Z. B. $[7]_p = 7$, $[14]_p = 13$, $[2\pi]_p = 5$.

Satz 4: *Die Vermutung V_m ist richtig, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} &1.\ [m]_p \geqslant \frac{4}{5}\, m = m - \frac{1}{5}\, m. \\ &2.\ [m/2]_p \geqslant \frac{4}{5} \cdot \frac{m}{2}. \\ &3.\ [m]_p \geqslant m - \sqrt{2\, m}. \end{aligned} \tag{14}$$

Bemerkung: Falls $m \geqslant 50$ ist $\sqrt{2\, m} < \frac{1}{5}\, m$ und aus 3. folgt 1. automatisch.

Beweis von Satz 4. Es sei also $\mathfrak{S}$ in einem Gitter Γ, das wir als natürlich voraussetzen, gegeben. $z(\mathfrak{S}) < m$. Sei $\tilde{\mathfrak{S}}$ die Menge der primitiven Punkte von $\mathfrak{S}$. Nun hat man drei Fälle zu unterscheiden:

I. Es gilt α) $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant [m]_p$ und

β) Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$.

II. Es ist $z(\tilde{\mathfrak{S}}) > [m]_p$. Es gilt also $\alpha)$ nicht.

III. Es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$. Es gilt also $\beta)$ nicht.

Zuerst behandeln wir I. Dies wird der einfachste Fall sein.

I. Es gilt $\alpha)$ $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqq [m]_p$.

$\beta)$ Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$.

Wir wenden Hilfssatz c an. Es gibt ein Gitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$, $\bar{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ mit $d(\bar{\Gamma}) = [m]_p\, d(\Gamma) \leqq m\, d(\Gamma)$ und wir sind fertig.

II. Es ist $z(\tilde{\mathfrak{S}}) > [m]_p$. Dies ist der schwierigste Fall. Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $[m]_p = p$, $[m/2]_p = r$.

Es gilt

$$1.\ p \geqq \frac{4}{5} m,\ \ 2.\ r \geqq \frac{4}{5}\frac{m}{2},\ \ 3.\ p \geqq m - \sqrt{2\,m}. \tag{14}$$

Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = r$. Wäre dies nämlich der Fall, so lägen am Halbstrahl von diesem $\mathfrak{G}$ mindestens r Gitterpunkte aus $\mathfrak{S}$, und es wäre

$$z(\mathfrak{S}) \geqq z(\tilde{\mathfrak{S}}) + r - 1 < p + r - 1 \geqq \frac{4}{5} m + \frac{2}{5} m - 1 \geqq m.$$

für $m \geqq 6$, Widerspruch.

Bei $m < 6$ ist aber nach den bisherigen Sätzen V_m richtig.

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{S}}_0 \text{ sei die Teilmenge jener } \mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}, \text{ für die } 2\,\mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}. \\ \tilde{\mathfrak{S}}_1 \text{ sei die Teilmenge jener } \mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}, \text{ für die } 2\,\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}. \\ \mathfrak{S}_1 \text{ sei die Menge jener } \mathfrak{G} \in \mathfrak{S}, \text{ welche } \tau(\mathfrak{G}) = 2 \text{ erfüllen.} \end{cases} \tag{15}$$

Nach (15) hat jedes $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$ die Form $\mathfrak{G} = 2\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$. Selbstverständlich hat man

$$z(\tilde{\mathfrak{S}}_0) + 2\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_1) \leqq z(\mathfrak{S}) \leqq m - 1.$$

Andererseits ist wegen der Annahme II

$$z(\tilde{\mathfrak{S}}) = z(\tilde{\mathfrak{S}}_0) + z(\tilde{\mathfrak{S}}_1) \geqq p + 1 \geqq \frac{4}{5} m + 1.$$

Daraus ergibt sich

$$z(\tilde{\mathfrak{S}}_1) \leqq m - \frac{4}{5} m - 2 < \frac{1}{5} m. \tag{16}$$

Wir betrachten Gitter ${}_r\Gamma(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$, so hat man $d({}_r\Gamma(\mathfrak{G})) = r$.

Es ist

$$z({}_r\mathfrak{M}) = r^n - 1 \text{ und } z({}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = r^{n-1} - 1 \text{ für } \mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}.$$

Daher gilt

$$\sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}_0} z({}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + 3 \sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}_1} z({}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = [z(\tilde{\mathfrak{S}}_0) + 2\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_1) + z(\tilde{\mathfrak{S}}_1)]\,(r^{n-1} - 1) \leqslant$$

$$\leqslant [(m-1) + \frac{m}{5}]\,(r^{n-1} - 1) < \frac{6\,m}{5}\,(r^{n-1} - 1) \leqslant \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2}\, r(r^{n-1} - 1) <$$

$$< 3(r^n - 1) = 3\, z({}_r\mathfrak{M}). \tag{17}$$

wegen (14) und (16).

Aus (17) ist zu ersehen: In ${}_r\mathfrak{M}$ liegt mindestens ein Punkt $\mathfrak{p}$, welcher in keinem der ${}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ liegt mit $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$, noch in drei der ${}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G}_i)$, wobei $\mathfrak{G}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$. Man darf annehmen, $\mathfrak{p}$ ist primitiv. Das folgt genau so, wie bei Satz 1 und Satz 2. Es sei also $\mathfrak{p} \in {}_r\mathfrak{M}_r$, aber $\mathfrak{p} \in {}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, falls $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$, und die Menge jener $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$, für die $\mathfrak{p} \in {}_r\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ gilt, bezeichne ich mit $\tilde{\mathfrak{S}}_+$. Es ist $\tilde{\mathfrak{S}}_+ \subset \tilde{\mathfrak{S}}_0$, $z(\tilde{\mathfrak{S}}_+) < 3$.

Wir betrachten Gitter ${}_2\Gamma(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$, speziell $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$, so gilt $d({}_2\Gamma(\mathfrak{G})) = 2$.

Es ist

$$z({}_2\mathfrak{M}) = 2^n - 1 \text{ und } z({}_2\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = 2^{n-1} - 1 \text{ für } \mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0,\ \mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_+.$$

Daher gilt

$$\sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}_+} z({}_2\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = z(\tilde{\mathfrak{S}}_+)\,(2^{n-1} - 1) \leqslant 2(2^{n-1} - 1) < 2^n - 1 = z({}_2\mathfrak{M}).$$

Es gibt daher einen Gitterpunkt $\mathfrak{g} \in {}_2\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{g} \notin {}_2\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ für $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_+$.

Es gibt ein $\mathfrak{s} \in {}_{2r}\mathfrak{M}$, welches bei $\mathfrak{s}\,(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

$$\begin{cases} s_i \equiv p_i \pmod r \\ s_i \equiv q_i \pmod 2 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{18}$$

erfüllt, wenn $\mathfrak{p}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\mathfrak{g}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. $\mathfrak{s}$ ist ein Gitterpunkt mit g. g. T. $(s_1, s_2, \ldots, s_n, 2\,r) = 1$. Das Gitter ${}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})$ hat daher

$$d({}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s}) = 2\,r\,d(\Gamma) < m\,d(\Gamma).$$

Es ist somit ${}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s}) \subset \Gamma$ und $d({}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})) = 2\,r\,d(\Gamma) \leqslant m\,d(\Gamma)$ und bleibt noch zu zeigen, daß auch ${}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{D}$.

Angenommen, es wäre $\mathfrak{G} \in {}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{S}$. Man darf annehmen, $\mathfrak{G}$ ist primitiv in ${}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})$. Es ist $\mathfrak{G}$ auch ein Gitterpunkt in Γ und man hat $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\ .\ \mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv in Γ. Da $d({}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})) = 2\,r$, ist $\tau(\mathfrak{G})/2\,r$. Es ist also möglich

$$\tau(\mathfrak{G}) = 1,\ \tau(\mathfrak{G}) = 2,\ \tau(\mathfrak{G}) = r,\ \tau(\mathfrak{G}) = 2r.$$

Gleich zu Beginn von II wurde gezeigt: Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = r$.

Also gibt es auch kein $\mathfrak{G}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = 2r$.

Es bleibt noch $\tau(\mathfrak{G}) = 1$ oder $\tau(\mathfrak{G}) = 2$. Daher liegt $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$ oder $\in \tilde{\mathfrak{S}}_1$ oder $\in \mathfrak{S}_1$.

Falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$ schließt man so:

Aus $\mathfrak{G} \in {}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})$ folgt $\mathfrak{G} \in {}_{r}\Gamma(\mathfrak{s})$. Ist nun $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$, so setze ich $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{G}}$. Ist aber $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$, so $\mathfrak{G} = 2\tilde{\mathfrak{G}}$, wobei $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$. Auf jeden Fall gilt $\tilde{\mathfrak{G}} \in {}_{r}\Gamma(\mathfrak{s})$. Daraus $\mathfrak{s} \in {}_{r}\Gamma(\tilde{\mathfrak{G}})$. Da $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{p} \pmod r$ ist $\mathfrak{p} \in {}_{r}\Gamma(\tilde{\mathfrak{G}})$. Da aber $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$ ist dies nach der Wahl von $\mathfrak{p}$ ausgeschlossen.

Falls aber

$$\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$$

folgt aus $\mathfrak{G} \in {}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})$ sofort $\mathfrak{G} \in {}_{r}\Gamma(\mathfrak{s})$, $\mathfrak{s} \in \Gamma({}_{r}\mathfrak{G})$. Da $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{p} \pmod r$ ist $\mathfrak{p} \in {}_{r}\Gamma(\mathfrak{G})$. Dies ist nur möglich für $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_+$.

Aus $\mathfrak{G} \in {}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s})$ folgt $\mathfrak{G} \in {}_{2}\Gamma(\mathfrak{s})$, $\mathfrak{s} \in {}_{2}\Gamma(\mathfrak{G})$. Da $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{g} \pmod 2$ ist $\mathfrak{g} \in {}_{2}\Gamma(\mathfrak{G})$. Für $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_+$ ist das nach Wahl von $\mathfrak{g}$ unmöglich. Widerspruch.

Dabei ist tatsächlich ${}_{2r}\Gamma(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$. Fall II ist bewiesen.

III. Es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p = p$.

Dieses $\mathfrak{G}$ liege O.B.d.A. auf der positiven x_1-Achse. Auf der x_1-Achse liegen daher mindestens

$$m - \sqrt{2m} \tag{19}$$

Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$.

Es gibt in diesem Fall ein $\mathfrak{A}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$, sodaß für das Gitter

$${}_{m}\Lambda(\mathfrak{A}) : x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n \equiv 0(m) \text{ neben } d({}_{m}\Lambda(\mathfrak{A})) = m\, d(\Gamma) \tag{20}$$

gilt ${}_{m}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$. Dies zeige ich so:

Definition: Unter ${}_{m}\nabla(\mathfrak{G})$ verstehen wir die Menge jener $X(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, x_i ganz, welche der Kongruenz $g_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \ldots + \ldots + g_n x_n \equiv 0(m)$ genügen, wenn $\mathfrak{G}$ ein Gitterpunkt ist. Falls $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\,\mathfrak{G}'$ ist ${}_{m}\nabla(\mathfrak{G})$ auch die Menge der X mit

$$g_1' + g_2' x_2 + g_3' x_3 + \ldots + g_n' x_n \equiv 0 \pmod{\left(\frac{m}{\text{g. g. T. } (m, \tau(\mathfrak{G}))}\right)} \tag{21}$$

Bezeichnung: $\mathfrak{M}'$ soll die Menge der $X(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ in $0 \leqq x_i < m$ sein[4]. Man hat $z(\mathfrak{M}') = m^{n-1}$.

[4] Analog wie bei Satz 2, die Zeilen unterhalb Gleichung (12).

Bezeichnung: $\mathfrak{M}'(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}' \cap {}_m\nabla(\mathfrak{G})$.

Es gilt $z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \dfrac{m^{n-1}}{m}$. g. g. T. $(m, \tau(\mathfrak{G})) \leqq m^{n-2} \cdot \tau(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{S}'$ die Menge jener $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, welche nicht auf der x_1-Achse liegen. Wegen (19) ist $z(\mathfrak{S}') < \sqrt{2m}$. Somit

$$\sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \mathfrak{S}'} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) \leqq m^{n-2} \sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \mathfrak{S}'} \tau(\mathfrak{G}) \leqq m^{n-2} \frac{z(\mathfrak{S}')\,[z(\mathfrak{S}') + 1]}{2} <$$

$$< m^{m-1} \frac{\sqrt{2m} \cdot \sqrt{2m}}{2} = m^{n-1} = z(\mathfrak{M}'). \tag{22}$$

Dabei folgt $\sum_{\mathfrak{G} \varepsilon \mathfrak{S}'} \tau(\mathfrak{G}) \leqq \dfrac{z(\mathfrak{S}')\,[z(\mathfrak{S}')+1]}{2}$ aus der Summenformel für arithmetische Reihen. Aus (22) ergibt sich: Es gibt ein $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{A}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ mit $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{M}'(\mathfrak{G})$ falls $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$.

Für dieses $\mathfrak{A}$ ist nebst ${}_m\Lambda(\mathfrak{A}) \subset \Gamma$, $d({}_m\Lambda(\mathfrak{A})) = m\,d(\Gamma)$ auch ${}_m\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$.

Angenommen dies wäre nicht der Fall: $\mathfrak{G} \in {}_m\Lambda(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$. Es kann $\mathfrak{G}$ nicht auf der x_1-Achse liegen. Wegen $\mathfrak{G} \in {}_m\Lambda(\mathfrak{A})$ wäre doch $g_1 \equiv 0(m)$, was mit $z(\mathfrak{S}) < m$ unverträglich ist. Doch ist auch ${}_m\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S}' = \mathfrak{O}$. Aus $\mathfrak{G} \in {}_m\Lambda(\mathfrak{A})$ folgt nämlich wegen (20) und der Definition von ${}_m\nabla(\mathfrak{G})$, daß $\mathfrak{A} \in {}_m\nabla(\mathfrak{G})$, weiter $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}'(\mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$. Dies ist nach der Wahl von $\mathfrak{A}$ ausgeschlossen.

Daher ist tatsächlich ${}_m\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ und auch III bewiesen.

Bemerkungen: Nach dem Primzahlsatz werden die Bedingungen I und II von Satz 4 für genügend großes m erfüllt. Es wird in der analytischen Zahlentheorie vermutet, daß auch die Bedingung III für genügend große m erfüllt wird. Sobald dies bewiesen ist, folgt der Satz 5 automatisch aus Satz 4.

Nach den neuesten Ergebnissen von *A. Selberg* wird III von „fast allen m" erfüllt. Die Dichte der $m \leqq x$, welche III erfüllen, geht also mit wachsendem x gegen eins. Es folgt daher aus Satz 4, daß V_m für fast alle m gültig ist. Ungleichung (1) ist daher ebenfalls für fast alle m richtig.

Satz 5: *Die Vermutungen V_m sind richtig bis auf höchstens endlich viele m.*

Beweis von Satz 5: Der Beweis stützt sich auf drei Ergebnisse der analytischen Zahlentheorie:

A) Es gibt ein m_1, so daß für $m > m_1$ gilt

$$1.\ [m]_p \geqq \frac{4}{5}\, m$$

$$2.\ [m/2]_p \geqq \frac{4}{5} \cdot \frac{m}{2} = \frac{2}{5}\, m.$$

Dies folgt leicht aus dem Primzahlsatz $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1.$

B) Es gibt eine feste Konstante C, so daß

$$[m]_p > m - C \cdot m^{5/8}.$$

(Ein Satz von *C. Ingham.*)

Ich setze $m_2 = e^{\frac{8 \log 2\, C}{8 \log 2 - 5}}$

C) Zwischen m und $m - \sqrt{2m}$, genauer im Intervall $m - \sqrt{2m} < m' \leqq m$, liegt ein m', das die kleinste Anzahl verschiedener Primfaktoren in diesem Intervall besitzt. Sei $t(m)$ die Zahl der verschiedenen Primfaktoren von m'. $t(m)$ ist eine eindeutige Funktion von m.

[Z. B. $t(7) = 1$: Man kann hier wählen $m' = 5$ oder $m' = 7$].

Man kann nun mit Hilfe des Primzahlsatzes zeigen, daß

$$t(m) = o\left(\frac{\log m}{\log_2 m}\right), \text{ wobei } \log_2 m = \operatorname{loglog} m. \tag{23}$$

Es gibt daher ein m_3, so daß für $m > m_3$

$$t(m) < \frac{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C}{\log_2 m} \quad [C \text{ vom Satz von } \textit{Ingham}]$$

Bemerkung: Die Schranke (23) könnte leicht durch eine bessere ersetzt werden, was aber hier nicht notwendig ist. Falls tatsächlich für alle genügend großen m gilt $[m]_p \geqq m - \sqrt{2m}$ ist sogar $t(m) = o(1)$. Die Sätze A), B) und C) werden hier verwendet, aber nicht bewiesen.

Nun wählen wir

$$m_0 = \max(m_1, m_2, m_3, 8). \tag{24}$$

Es wird gezeigt: Für alle $m > m_0$ ist V_m richtig. Also ist V_m richtig für alle bis auf höchstens endlich viele m.

Es liege also ein st. G. $\mathfrak{S}$ mit $z(\mathfrak{S}) < m$ in einem Gitter Γ vor. Es gibt analog wie bei Satz 4 drei Fälle zu unterscheiden, wenn wir unter $\tilde{\mathfrak{S}}$ die Menge der primitiven Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$ verstehen.

I. Es gilt:

$\alpha)$ $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant [m]_p$.

$\beta)$ Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$.

II. Es ist $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \geqslant [m]_p$. Es gilt also $\alpha)$ nicht.

III. Es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$. Es gilt also $\beta)$ nicht.

Zunächst Fall I:

I Es gilt:

$\alpha)$ $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant [m]_p$.

$\beta)$ Es gibt kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$.

In diesem Falle geht der Beweis wie bei Fall I von Satz 4. Dort geht nämlich keine der drei Forderungen von Satz 4 ein.

II Beim Beweis des Falles II bei Satz 4 geht nur ein:

$$1.\ [m]_p \geqslant \frac{4}{5}\, m$$

$$2.\ [m/2]_p \geqslant \frac{4}{5} \cdot \frac{m}{2}.$$

Da $m > m_0 \geqslant m_1$ wird wegen A) dies erfüllt sein. Man kann daher den Beweis von Satz 4, Fall II, wortwörtlich übertragen.

Es bleibt noch Fall III.

III Es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$.

Wir unterscheiden noch einmal zwei Fälle:

IIIa Es gibt ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant m - \sqrt{2\,m}$.

IIIb Es gibt kein solches $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$.

Zunächst betrachten wir den Fall

IIIa. Man darf Γ als das natürliche Gitter annehmen und voraussetzen, daß dieses $\mathfrak{G}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant m - \sqrt{2\,m}$ auf der x_1-Achse liegt.

Auf der x_1-Achse liegen daher mindestens

$$m - \sqrt{2\,m} \tag{19}$$

Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$.

Also wird (19) erfüllt. Gerade darauf kommt es aber beim Beweis des Falles III von Satz 4 an. Diesen Beweis kann man daher wortwörtlich auf Satz 5, Fall IIIa, übertragen.

Es bleibt daher nur noch

IIIb Es gibt zwar ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$, jedoch kein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant m - \sqrt{2\,m}$.

Das $\mathfrak{G}$ mit $\tau(\mathfrak{G}) = [m]_p$ soll in der x_1-Achse liegen und Γ das natürliche Gitter sein. Nach B ist $[m]_p > m - C\, m^{5/8}$ und die Zahl z_0 der Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$ auf der x_1-Achse erfüllt $z_0 > m - C\, m^{5/8}$.

Anderseits ist wegen IIIb $z_0 < m - \sqrt{2\, m}$, insgesamt daher

$$m - C\, m^{5/8} < z_0 < m - \sqrt{2\, m}. \tag{25}$$

Sei $\mathfrak{S}'$ die Menge jener $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, welche nicht auf der x_1-Achse liegen. Auf Grund von (25) und wegen $z(\mathfrak{S}') + z_0 = z(\mathfrak{S}) < m$ folgt

$$z(\mathfrak{S}') < C\, m^{5/8}. \tag{26}$$

Es gibt in $m - \sqrt{2\, m} < m' \leqq m$ ein m', welches genau $t(m)$ verschiedene Primfaktoren hat.

Betrachten wir einen Halbstrahl H, der nicht auf der x_1-Achse liegen soll. Die Zahl der darauf befindlichen Gitterpunkte von $\mathfrak{S}$ bezeichne ich mit $k(H)$.

$A(H) = \sum\limits_{\substack{\mathfrak{G} \in H \cap \mathfrak{S} \\ \tau(\mathfrak{G})/m'}} \tau(\mathfrak{G})$ soll abgeschätzt werden. Die Summe ist über alle $\mathfrak{G} \in H \cap \mathfrak{S}$ zu erstrecken, deren $\tau(\mathfrak{G})$ ein Teiler von m' ist.

Hilfssatz d: $A(H) \leqq k(H)\, e^{5/8 \log m' - \log 2C}$.

Beweis: Die Menge der Primfaktoren von m' bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$.

$$z(\mathfrak{R}) = t(m) < \frac{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C}{\log_2 m} \text{ nach (23)} \tag{27}$$

Die Menge der natürlichen Zahlen τ, deren Primfaktoren alle in $\mathfrak{R}$ liegen, sei L. Dann hat man

$$A(H) = \sum_{\substack{\mathfrak{G} \in H \cap \mathfrak{S} \\ \tau(\mathfrak{G})/m'}} \tau(\mathfrak{G}) = \sum_{\substack{1 \leq \tau \leq k(H) \\ \tau/m'}} \tau \leqq \sum_{\substack{1 \leq \tau \leq k(H) \\ \tau \in L}} \tau \leqq k(H) \cdot \sum_{\substack{1 \leq \tau \leq k(H) \\ \tau \in L}} 1 = k(H) \cdot B(H). \tag{28}$$

Es ist $\tau = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \ldots p_r^{i_r}$, wobei $p_j \in \mathfrak{R}$. Wegen $\tau \leqq k(H)$ ist $i_1 \log p_1 + i_2 \log p_2 + \ldots + i_r \log p_r \leqq \log k(H)$. Daraus folgt

$$i_j \leqq \frac{\log k(H)}{\log 2} \quad (j = 1, 2, \ldots, r = z(\mathfrak{R})).$$

Daraus folgt weiter

$$B(H) = \sum_{\substack{1 \leq \tau \leq k(H) \\ \tau \in Z}} 1 \leqq \left(1 + \frac{\log k(H)}{\log 2}\right)^{t(m)} \leqq \left(1 + \frac{\log z(\mathfrak{S}')}{\log 2}\right)^{t(m)} < \left(1 + \frac{\log (C.m^{5/8})}{\log 2}\right)^{t(m)} \tag{29}$$

Es ist $1 + \dfrac{\log (C.m^{5/8})}{\log 2} = \dfrac{\log C + {}^5/_8 \log m + \log 2}{\log 2} - < \log m$ weil nach B gilt

$$\log m > \frac{8 \log 2\, C}{8 \log 2 - 5}, \text{ da } m > m_0 \geqq m_2.$$

Setzt man dies in (29) ein, so ergibt sich
$B(H) < (\log m)^{t(m)} = e^{t(m) \log_1 m} < e^{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C}$ nach (27).

Daraus und aus (28) ergibt sich

$$A(H) \leqslant k(H) \,.\, e^{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C}, \tag{30}$$

Hilfssatz d ist bewiesen.

Sei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G})$ ein Teiler von m'. Die Menge ${}_{m'}\nabla(\mathfrak{G})$ sei die Menge der $X'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, welche $g_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n \equiv 0 \pmod{m'}$ erfüllen. Falls $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G}) \,.\, \mathfrak{G}'$, so entspricht dies

$$g_1' + g_2' x_2 + \ldots + g_n' x_n \equiv 0 \pmod{\frac{m'}{\tau(\mathfrak{G})}}, \text{ da } \tau(\mathfrak{G})/m'.$$

Unter $\mathfrak{M}'$ verstehen wir die Menge der ganzzahligen $X'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ mit $0 \leqslant x_i < \mathfrak{m}'$.

Bezeichnung: $\mathfrak{M}'(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}' \cap {}_{m'}\nabla(\mathfrak{G})$. Man hat

$$z(\mathfrak{M}') = m'^{n-1}, \; z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = \frac{m'^{n-1}}{\dfrac{m'}{\tau(\mathfrak{G})}} = m'^{n-2} \,.\, \tau(\mathfrak{G}).$$

$$E = \sum_{\substack{\mathfrak{G} \varepsilon \mathfrak{S}' \\ \tau(\mathfrak{G})/m'}} z(\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})) = m'^{n-2} \,.\, \sum_{\substack{\mathfrak{G} \varepsilon \mathfrak{S}' \\ \tau(\mathfrak{G})/m'}} \tau(\mathfrak{G}) = m'^{n-2} \sum_{\substack{H \\ H \text{ nicht } x_1\text{-Achse}}} A(H) \leqslant$$

$$\leqslant m'^{n-2}\, e^{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C} \,.\, \sum_{\substack{H \\ H \text{ nicht } x_1\text{-Achse}}} k(H) < m'^{n-2}\, e^{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C} \,.\, C \,.\, m^{5/8} \tag{31}$$

weil $\Sigma\, k(H) = z(\mathfrak{S}') < C\, m^{5/8}$ nach (26). Es folgt wegen $m > 8$

$$E < m'^{n-2} \,.\, 2\, C \,.\, m'^{5/8}\, e^{{}^3/_8 \log m' - \log 2\, C} = e^{(n-1-{}^3/_8) \log m' + \log 2\, C - \log 2\, C + {}^3/_8 \log m'} =$$

$$= e^{(n-1) \log m'} = (m')^{n-1} = z(\mathfrak{M}'). \tag{32}$$

Aus (31) und (32) ergibt sich: Es gibt ein $\mathfrak{A}(a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathfrak{M}'$, welches in keinem $\mathfrak{M}'(\mathfrak{G})$ liegt, wenn $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$ und $\tau(\mathfrak{G})/m'$. Das entsprechende Gitter

$${}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A}): x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \equiv 0 \pmod{m'}$$

erfüllt bereits ${}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A}) \subset \Gamma$, $d({}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A})) = m'\, d(\Gamma) \leqslant m\, d(\Gamma)$ und auch ${}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$.

Angenommen, es wäre ${}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{O}$. Es gäbe ein $\mathfrak{G} \in {}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$. Es kann $\mathfrak{G}$ nicht auf der x_1-Achse liegen. Dann wäre doch $g_1 \equiv 0 \pmod{m'}$ und auf der x_1-Achse lägen mindestens $m' > m - \sqrt{2\,m}$ Punkte, was nach IIIb und (25) ausgeschlossen ist. Es ist nur noch denkbar, daß $\mathfrak{G} \in {}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$. Man darf annehmen, $\mathfrak{G}$ ist primitiv in ${}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A})$. Es ist $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\,.\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiv in Γ. Man hat $d(m'\,\Lambda(\mathfrak{A})) = m'\,d(\Gamma)$, woraus ersichtlich ist, daß $\tau(\mathfrak{G})$ ein Teiler von m' ist.

Aus $\mathfrak{G} \in {}_{m'}\Lambda(\mathfrak{A})$ folgt nun $\mathfrak{A} \in {}_{m'}\nabla(\mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}'$, $\tau(\mathfrak{G})/m'$. Dies ist aber nach der Wahl von $\mathfrak{A}$ ausgeschlossen, Widerspruch. Daher ${}_{m}\Lambda(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{O}$ und Satz 5 ist in allen Teilen bewiesen.

Bemerkung: Aus diesem Satz ist zu ersehen, daß bei endgültiger Lösung des Problems vor allem die analytische Zahlentheorie eine große Rolle spielen dürfte.

Verallgemeinerungen der Ungleichung $k\,\Delta^k(S) \geqq \Delta(S)$.

Bisher wurde die Ungleichung $k\,\Delta^k(S) \geqq \Delta(S)$ untersucht. Nun soll $\Delta^{kl}(S)$ durch $\Delta^l(S)$ nach unten abgeschätzt werden. Nützlich dafür ist

Satz 6: *Gegeben sei ein Sternkörper S, natürliche Zahlen $l > 1$, $k > 1$, eine Primzahl p mit $p \geqq k + l - 2$. Ferner liege ein Gitter Γ vor. Wir bezeichnen $\mathfrak{S} = \Gamma \cap S^0$, wobei S^0 das Innere von S bedeutet. $\mathfrak{S}$ bildet eine st. G., eine „sternförmige Gitterpunktmenge" in Γ. Unter $\mathfrak{S}_0$ verstehe ich die Teilmenge jener $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, für die $p/\tau(\mathfrak{G})$, wenn die Zahl $\tau(\mathfrak{G})$ so definiert wird wie vorher, d. h. $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\,.\,\mathfrak{G}'$, wobei $\mathfrak{G}'$ primitiver Gitterpunkt. $\mathfrak{S}_1$ sei die Teilmenge jener $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, für die $\tau(\mathfrak{G}) \leqq l$, und auf deren Halbstrahl kein Gitterpunkt aus $\mathfrak{S}_0$ liegt. Offenbar ist $z(\mathfrak{S}) \geqq p\,z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1)$. Es gelte nun $p\,d(\Gamma) < \Delta^l(s)$.*

Behauptet wird, daß dann gilt

$$p\,z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) \geqq k\,l.$$

Der Beweis verläuft über Satz 6a.

Satz 6a. *Gegeben sei eine st. G. in einem Gitter Γ. Weiter sollen $l > 1$, $k > 1$ natürliche Zahlen sein und p eine Primzahl mit $p \geqq k+l-2$. $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ seien definiert wie bei Satz 6. Falls nun $pz(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) < k\,l$, so gibt es ein Teilgitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = pd(\Gamma)$, auf welchem weniger als l-Gitterpunkte von Γ liegen, d. h. $z(\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) < l$.*

Beweis von Satz 6a. Die Menge jener primitiven Gitterpunkte $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, bei denen auch $p\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, somit $p\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_0$, sei mit $\tilde{\mathfrak{S}}$ bezeichnet. Offenbar hat man $z(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqq z(\mathfrak{S}_0)$. Man darf nun O.B.d.A. Γ als das

Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten voraussetzen, $d(\Gamma) = 1$. Man hat [${}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ def. nach Formel (4)]

$$(l - z(\mathfrak{S}_0)) \sum_{\mathfrak{G}\,\varepsilon\,\tilde{\mathfrak{S}}} z({}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) + \sum_{\mathfrak{G}\,\varepsilon\,\mathfrak{S}_1} z({}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = [(l - z(\mathfrak{S}_0))\, z(\tilde{\mathfrak{S}}) + z(\mathfrak{S}_1)]\,(p^{n-1} - 1) \leqq$$

$$\leqq [(l - z(\mathfrak{S}_0))\, z(\mathfrak{S}_0) + l\,k - 1 - p\, z(\mathfrak{S}_0)]\,(p^{n-1} - 1) \leqq$$

$$\leqq [(l - z(\mathfrak{S}_0))\, z(\mathfrak{S}_0) + l\,k - z(\mathfrak{S}_0)\,(k + l - 2) - 1]\,(p^{n-1} - 1) \leqq$$

$$\leqq [(l - z(\mathfrak{S}_0))\,(k + l - 2) + z(\mathfrak{S}_0)\,(l - z(\mathfrak{S}_0)) - l(l - 2) - 1]\,(p^{n-1} - 1)^{5} \leqq$$

$$\leqq (l - z(\mathfrak{S}_0))\,(k + l - 2)\,(p^{n-1} - 1) \leqq (l - z(\mathfrak{S}_0))\, p(p^{n-1} - 1) <$$

$$< (l - z(\mathfrak{S}_0))\,(p^n - 1) = (l - z(\mathfrak{S}_0)) z({}_p\mathfrak{M}).$$

Daraus ergibt sich: In ${}_p\mathfrak{M}$ gibt es einen Punkt $\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}$ in keinem ${}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ liegt, wobei $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}$, und in weniger als $l - z(\mathfrak{S}_0)$ der ${}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$. Man darf annehmen, $\mathfrak{p}$ ist primitiv. (Denn hat $\mathfrak{p}$ nicht obige Eigenschaft, so auch nicht die Vielfachen von $\mathfrak{p}$). Die Menge derjenigen $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$, für die $\mathfrak{p} \in {}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, bezeichne ich mit $\mathfrak{S}^+$. Dann ist $\mathfrak{S}^+ \in \mathfrak{S}$, $z(\mathfrak{S}^+) < l - z(\mathfrak{S}_0)$.

Das Gitter:

$${}_p\Gamma(\mathfrak{p}) : p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \equiv 0 \pmod{p}\ [\mathfrak{p}(p_1, p_2, \ldots, p_n)]$$

erfüllt bereits das Gewünschte. Es ist ${}_p\Gamma(\mathfrak{p}) \subset \Gamma$, $d({}_p\Gamma(\mathfrak{p})) = p\, d(\Gamma) = p$ und es liegen in ${}_p\Gamma(\mathfrak{p})$ bloß jene Punkte aus $\mathfrak{S}$, die in $\mathfrak{S}_0$ oder $\mathfrak{S}^+$ sind. Da aber $z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}^+) < l$, sind das weniger als l Punkte.

Angenommen, ein weiterer Punkt $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}^+$ sei in ${}_p\Gamma(\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\ .\ \tilde{\mathfrak{p}}$ und liegt $\tilde{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathfrak{S}}$ so folgt $\tilde{\mathfrak{p}} \in {}_p\Gamma(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in {}_p\Gamma(\tilde{\mathfrak{p}})$, was wegen $\tilde{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathfrak{S}}$ ausgeschlossen ist. Falls $\mathfrak{G} = \tau(\mathfrak{G})\ .\ \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}' \notin \tilde{\mathfrak{S}}$, so ist $\tau(\mathfrak{G}) \leqq l$ oder $\tau(\mathfrak{G}) > l$ möglich. Bei $\tau(\mathfrak{G}) > l$ liegen die Punkte $\mathfrak{p}'$, $2\,\mathfrak{p}'$, $\ldots$, $l\,\mathfrak{p}'$ ebenfalls alle in ${}_p\Gamma(\mathfrak{p})$. Da $z(\mathfrak{S}^+) < l$, ist mindestens einer davon, etwa $\mathfrak{G}'$, nicht in $\mathfrak{S}^+$. Man hat $\mathfrak{G}' \notin \mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{G}' \notin \mathfrak{S}^+$, $\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_1$, wobei $\mathfrak{G}' \in {}_p\Gamma(\mathfrak{p})$, $\tau(\mathfrak{G}') \leqq l$. Es genügt also, den Fall $\tau(\mathfrak{G}') \leqq l$ zu betrachten. Aus $\mathfrak{G}' \in {}_p\Gamma(\mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p} \in {}_p\Gamma(\mathfrak{G}')$, $\mathfrak{p} \in {}_p\mathfrak{M}(\mathfrak{G}')$. Da wegen $\tau(\mathfrak{G}') \leqq l$ aber $\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}_1$ muß $\mathfrak{G}' \in \mathfrak{S}^+$ sein. Das ist bereits ein Widerspruch.

Folglich ist ${}_p\Gamma(\mathfrak{p})$ bereits das gesuchte Gitter und Satz 6a bewiesen.

Beweis von Satz 6. Der Beweis erfolgt indirekt. Angenommen, es gäbe ein S mit $p\, d(\Gamma) < \Delta'(S)$ und $p\, z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) < k\, l$. Nach Satz 6a existiert ein Gitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\bar{\Gamma}) = p\, d(\Gamma)$ und $z(\bar{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) < l$. Es ist nun $z(\bar{\Gamma} \cap \dot{S}) = z(\bar{\Gamma} \cap \Gamma \cap \dot{S}) = z(\bar{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) < l$.

Daher ist $\bar{\Gamma}$ l-zulässig für S und $d(\bar{\Gamma}) \geqq \Delta'(S)$, somit $p\, d(\Gamma) \geqq \Delta'(S)$. Das aber bedeutet einen Widerspruch. Es ist daher für alle S mit

[5] Denn $z(\mathfrak{S}_0) \leqq l$.

$$p\, d(\Gamma) < \Delta^l(S)$$
$$p\, z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) \geqq k\, l$$

und Satz 6 bewiesen.

Folgerungen aus Satz 6. Falls $p\, d(\Gamma) < \Delta^l(S)$, so ist $z(\mathfrak{S}) \geqq p\, z(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) \geqq k\, l$. Γ kann dann nicht k l-zulässig sein. Für k . l zulässige Γ gilt daher $p\, d(\Gamma) \geqq \Delta^l(S)$ und daraus die wichtige Ungleichung

$$p\, \Delta^{kl}(S) \geqq \Delta^l(S). \tag{33}$$

Falls $l = 2$, k eine Primzahl, kann man setzen $p = k$ und erhält $p\, \Delta^{2p}(S) \geqq \Delta^2(S)$. Man könnte vermuten, daß man allgemein die Ungleichung (33) durch die bessere

$$k\, \Delta^{kl}(S) \geqq \Delta^l(S) \tag{34}$$

ersetzen kann, oder daß es doch für jedes l bestimmte k gibt, so daß (34) gilt. Daß dies nicht so ist, besagt der

Satz 7. *Zu jedem natürlichen $l \geqq 3$, $k > 1$, gibt es einen Sternkörper S mit $k\, \Delta^{kl}(S) < \Delta^l(S)$. Ungleichung (34) ist offenbar falsch.*

Beweis von Satz 7. Es genügt, für jedes solche l, k einen Sternkörper S mit $k\, \Delta^{kl}(S) < \Delta^l(S)$ anzugeben. Die angegebenen S werden alle im R_2 liegen. Sei ein cartesisches Koordinatensystem (x, y) gegeben.

Sei R das Rechteck $\quad |x| \leqq 2\,k\,l + 1,\ |y| \leqq 1$

P_ν das Parallelogramm $\quad |x - \nu\, y| \leqq 1,\ |y| \leqq 2\,k\,l + 1$
(Für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, l - 3$)

R_R das Rechteck $\quad 0 \leqq x \leqq k,\ 0 \leqq y \leqq 2$
und R_L dazu spiegelbildlich zu O, d. h.

R_L das Rechteck $\quad -k \leqq x \leqq 0,\ -2 \leqq y \leqq 0.$

Weiter soll sein

$$N = R \cup R_R \cup T_L \cup \bigcup_{\nu=0}^{l-3} P_\nu.$$

Es ist N ein abgeschlossener Sternkörper. Weiter sei:

V die Menge der Punkte $(x, 0)$ mit $k + 1 \leqq |x| \leqq 2\,k\,l + 1$

W_ν die Strecken $x - \nu y = 0$, $k+1 \leqq |y| \leqq 2\,kl+1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l-3)$

$$U = V \cup \bigcup_{\nu=0}^{l-3} W_\nu.$$

Schließlich definiere ich den Sternbereich L durch $L = N - U$. L ist natürlich kein abgeschlossener Sternkörper.

Es wird nun gezeigt: Jedes Gitter Γ mit $d(\Gamma) = k$ hat im Inneren von L mindestens l-Gitterpunkte. Der Beweis dafür erfolgt indirekt. Wir nehmen an, es gäbe solch ein Gitter Γ. Das Rechteck R ist konvex und hat als Flächeninhalt $J(R) = 4(2\,k\,l + 1)$.

Van der Corput[6] zeigte, daß, wenn r eine natürliche Zahl ist und K konvex, $J(k) > 4\,r\,d(\Gamma)$, so liegen mindestens r-Gitterpunkte von Γ im Inneren von K. Es liegen somit mindestens $2\,l$ Gitterpunkte von Γ im Inneren von R. Es müssen also mindestens $l + 1$ Gitterpunkte auf V liegen. Nun kann man leicht einsehen, daß Γ keinen Gitterpunkt mit Koordinaten (α, β) und $0 < |\beta| < 1$ besitzt. Denn auf der Geraden $y = \beta$ lägen dann mehr als l Gitterpunkte im Inneren von R. Es soll $X_0(x_0, 0)$ den primitiven Gitterpunkt von Γ auf der x-Achse bedeuten. Da Γ keinen Punkt (α, β) mit $0 < |\beta| < 1$ besitzt, ist $d(\Gamma) \geqslant x_0$. Anderseits $d(\Gamma) = k$, woraus $x_0 \leqslant k$ folgt. Also liegt X_0 im Inneren von L. Bei den P_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, l-3)$ gelten analoge Beziehungen wie bei R. Auf der Geraden $x - \nu\,y = 0$ liegen Gitterpunkte von Γ. Die entsprechenden primitiven Gitterpunkte, Y_ν, liegen im Inneren von L. Im Inneren von L sind also die Punkte $X_0, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{l-3}$. Das sind insgesamt $l - 1$ Punkte und kein weiterer Gitterpunkt darf im Inneren von L sein. Daher ist $x_0 \geqslant \dfrac{k+1}{2}$, weil sonst auch $2\,X_0$ im Inneren von L läge. Da $x_0 \geqslant \dfrac{k+1}{2}$ und $d(\Gamma) = k$, gibt es einen Punkt (α, β) mit $\beta \leqslant \dfrac{2\,k}{k+1} = 2 - \dfrac{2}{k+1}$. Da $\beta \geqslant 1$ und $x_0 \leqslant k$, muß somit in $T: 0 \leqslant x < k,\ 1 \leqslant y \leqslant 2 - \dfrac{2}{k+1}$ ein Gitterpunkt von Γ liegen. T ist im Inneren von L. Es wäre also bloß noch denkbar, daß dieser Punkt einer der Y_ν ist. Es wäre dann $Y_\nu(x_\nu, y_\nu)$ mit $y_\nu \leqslant 2 - \dfrac{2}{k+1}$. Dies aber hieße, daß auch der Punkt $2\,Y_\nu$ im Inneren von L wäre, da $2(2 - \dfrac{2}{k+1}) < k+1$. Falls $d(\Gamma) = k$, liegen mindestens l Gitterpunkte im Inneren von L. Daraus folgt weiter:

Falls $d(\Gamma) \leqslant k$, so befinden sich mindestens l Gitterpunkte im Inneren von L. Anderseits liegen im Inneren von L bloß $l\,k + \max(-k, 2 - l)$

[6] Acta Arithmetica, 2, S. 145—146 (1936).

Punkte des natürlichen Gitters. Ist $-k \geqq 2-l$, so sind dies die Punkte $\lambda(1,0)\,[\lambda=1,2,\ldots,k]$, sowie $\lambda(\mu,1)$ $[\lambda=1,2,\ldots,k;\ \mu=0,1,2,\ldots,l-3]$. Das sind tatsächlich $l\,k-k$ Punkte. Falls $2-l>-k$, kommen dazu noch die Punkte $(\mu,1)$ $[\mu=l-2,l-1,l,\ldots,k-1]$ und man hat $l\,k-k+k-l+2=l\,k+2-l$ Punkte.

Nun betrachten wir eine Folge von Sternkörpern S_μ so, daß $S_{\mu+1}\supset S_\mu$ und weiter $\dot{L}=\overset{\infty}{\underset{\mu=1}{U}}\dot{S}_\mu$. Dabei bedeutet $\dot{J}$ das Innere von J, wenn J eine beliebige Punktmenge. [Man kann für die S_μ z. B. den Sternkörper N nehmen und statt $U=V\cup U\,W_\nu$ davon bestimmte Zwickeln um V und die W_ν, welche mit wachsendem μ schmäler werden, wegnehmen.] Da $\dot{S}_\mu\subset\dot{L}$, liegen im Inneren von S_μ höchstens $Z=lk+\max(-k,2-l)$ Punkte des natürlichen Gitters. Daher ist $\Delta^{z+1}(S_\mu)\leqq 1$ für alle μ.

Es gibt ein μ_0, so daß $\Delta^l(S_{\mu_0})>k$ und es ist folglich $\Delta^l(S_\mu)>k$ für $\mu\geqq\mu_0$. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Für alle μ gilt $\Delta^l(S_\mu)\leqq k$. Zu jedem μ gibt es ein l-kritisches Gitter Γ_μ mit $d(\Gamma_\mu)\leqq k$. Es ist weiter $|\mathfrak{G}|\geqq c$ für alle $\mathfrak{G}\in\Gamma_\mu$, wobei c eine von μ unabhängige Konstante ist. [Man kann wählen $c=r/l$, wenn r den Radius eines zentrischen, S_1 eingeschriebenen Kreises bedeutet.] Die Bedingungen des Auswahlsatzes von *Mahler* werden erfüllt und es gibt daher eine Teilfolge Γ_ϱ, so daß $\Gamma=\lim\limits_{\varrho\to\infty}\Gamma_\varrho$ existiert.

Die Konvergenz ist dabei im Sinne von *Mahler* verstanden. Daraus ergibt sich: Ist Z_0 ein Punkt von Γ und U_0 eine Umgebung von Z_0 (etwa ein Kreis), so gibt es ein $\bar{\bar{\varrho}}$, so daß für $\varrho>\bar{\bar{\varrho}}$ in U_0 ein Punkt Z_ϱ liegt mit $Z_\varrho\in\Gamma_\varrho$. Γ ist l-zulässig für jedes S_ϱ. Denn $\Gamma_{\bar{\varrho}}$ ist l-zulässig für S_ϱ, wenn nur $\bar{\varrho}\geqq\varrho$ und wir haben $\Gamma=\lim\limits_{\bar{\varrho}\to\infty}\Gamma_{\bar{\varrho}}$. Angenommen, Γ wäre nicht l-zulässig für S_ϱ. Es liegen l Punkte $Z_0^1, Z_0^2, \ldots, Z_0^l$ von Γ im Inneren von S_ϱ, in S_ϱ. Dazu gibt es Umgebungen $U^1, U^2, \ldots, U^l$, die sich nicht überdecken und alle in $\dot{S}_\varrho$ liegen. Für $\bar{\varrho}>\bar{\bar{\varrho}}$ liegt daher in jedem U^i ein Punkt aus $\Gamma_{\bar{\varrho}}$. Dies würde aber bedeuten, daß $\Gamma_{\bar{\varrho}}$ nicht l-zulässig wäre für S_ϱ wenn $\bar{\varrho}>\varrho$, was einen Widerspruch darstellt. In $\dot{L}$ liegen mindestens l Gitterpunkte von Γ, da $d(\Gamma)\leqq k$. Es gibt ein ϱ_1, so daß für alle $\varrho>\varrho_1$ diese l Punkte in S_ϱ liegen. Das bedeutet jedoch, daß Γ nicht l-zulässig ist für S_ϱ, wenn $\varrho>\varrho_1$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, daß $\Delta^l(S_\mu)\leqq k$ für alle μ. Somit ist $\Delta^l(S_\mu)>k$ für $\mu\geqq\mu_0$.

Anderseits hat man $\Delta^{z+1}(S_\mu)\leqq 1$. Beides zusammen ergibt $l\,k\,\Delta^{z+1}(S_\mu)<l\,\Delta^l(S_\mu)$. Dabei ist einzusetzen $Z=k\,l+\max(-k,2-l)$.

Da $Z \leqslant k\,l - 1$ folgt daraus das schwächere Ergebnis $l_m\, \Delta^{lm}(S) < l\, \Delta^l(S)$.
w.z.b.w.

Satz 8. *Für jeden Sternkörper S existiert* $\lim\limits_{k\to\infty} k\, \Delta^k(S) = \square(S)$ *und es gilt* $l\, \Delta^l(S) \leqslant \square(S)$ *für alle* l.

Beweis von Satz 8: Sei l fest. $p(k)$ sei für jedes k die kleinste Primzahl, welche $p \geqslant k + l - 2$ erfüllt. Aus dem Primzahlsatz folgt, daß $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{p\,(k)} = 1$.

Nach Satz 6, erste Folgerung, gilt für alle k

$$k\, l\, \Delta^{kl}(S) = \frac{k}{p(k)}\, p(k)\, l\, \Delta^{kl}(S) \geqslant \frac{k}{p(k)}\, l\, \Delta^l(S).$$

Daraus folgt

$$\liminf_{k\to\infty} k\, l\, \Delta^{kl}(S) \geqslant l\, \Delta^l(S).$$

Sei nun m beliebig. $k(m)$ soll die nächst größere ganze Zahl an m/l bedeuten, $k(m) = \{m/l\}$.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{k(m)\, l} = 1.$$

Es ergibt sich sofort

$$m\, \Delta^m(S) \geqslant m\, \Delta^{k(m)l}(S) = \frac{m}{k(m)\, l}\, \Delta^{k(m)l} \,.\, k(m)\, l.$$

Man erhält daraus

$$\square(S) = \liminf_{m\to\infty} m\, \Delta^m(S) \geqslant l\, \Delta^l(S). \tag{35}$$

Da man S ein Parallelepiped umschreiben kann und bei Parallelepipeden $\mathfrak{P}$ gilt $m\, \Delta^m(\mathfrak{P}) = \dfrac{J(\mathfrak{P})}{2^n} = \text{const}$, ist wegen $m\, \Delta^m(S) \leqslant m\, \Delta^m(\mathfrak{P})$ jedenfalls $m\, \Delta^m(S)$ beschränkt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\square(S)$ der einzige Häufungspunkt von $m\, \Delta^m(S)$ ist. Angenommen, es gäbe einen weiteren, etwa h. Es ist $h > \square(S)$. Es gibt ein l, so daß $|\, l\, \Delta^l(S) - h\,| < h - \square(S)$. Daraus folgt $l\, \Delta^l(S) > \square(S)$, was mit (35) unvereinbar ist. Es existiert daher $\lim\limits_{m\to\infty} m\, \Delta^m(S) = \square(S)$ und gilt $l\, \Delta\,(S) \leqslant \square(S)$ w.z.b.w.

Nun zeige ich einen Satz für konvexe Flächen in der Ebene:

Satz 9. *Sei S eine konvexe Fläche im R_2 und $J_p(S)$ der Inhalt des flächenkleinsten S umschriebenen Parallelogramms. Dann wird behauptet, es ist*

$$\sqcap(S) = \frac{J_p(S)}{4}. \tag{36}$$

Beweis von Satz 9. Für Parallelepipede ist der Satz richtig. Dort ist $k\,\Delta^k(\mathfrak{P}) = \dfrac{J(\mathfrak{P})}{4} = \dfrac{J_p(\mathfrak{P})}{4}$. Man darf sich daher auf andere Flächen beschränken.

Sei g eine Gerade durch den Ursprung. $S \cap g$ ist eine abgeschlossene Strecke, ihre Länge bezeichne ich mit $2\,l$. Weiter soll g_1 eine zu g parallele Stützgerade an S bedeuten und g_2 jene zu g parallele Gerade, welche von g und g_1 den gleichen Abstand besitzt. Die Strecke $S \cap g_2$ habe die Länge $\mathfrak{L}$. Da S konvex ist, gilt $\mathfrak{L} \geqq l$. Doch da S kein Parallelogramm, hat man sogar $\mathfrak{L} > l$. Es ist sogar $\mathfrak{L} \geqq c\,l$, wobei $c = c(S) > 1$, nicht von der speziellen Wahl von g abhängt. Wäre dies nicht, so gäbe es eine Folge von Geraden g_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathfrak{L}_n}{l_n} = 1$. Diese Folge hätte eine Teilfolge, konvergent zu einer Geraden g. [Konvergent soll heißen, daß der Richtungswinkel konvergiert.]

Man überlegt leicht, daß $\mathfrak{L}/l$ sich mit dem Winkel stetig ändert. Es wäre also $\mathfrak{L}_0/l_0 = 1$, $\mathfrak{L}_0 = l_0$, was ja ausgeschlossen war. Daher ist $\mathfrak{L} \geqq c\,l$, wobei $c > 1$ fest für jedes S.

Jedem k sei ein k-kritisches Gitter Γ_k von S zugeordnet. Die Menge der Punkte von Γ_k, die im Inneren von S liegen, bilden eine sternförmige Gitterpunktmenge $\mathfrak{S}_k$. Auf jedem Halbstrahl H liegt eine gewisse Anzahl von Gitterpunkten von $\mathfrak{S}_k$, die ich mit $n(H, k)$ bezeichne. Nur führen wir ein: $n(k) = \max\limits_{H} (H, k)$. Mit $k \to \infty$ steigt $n(k)$ über alle Grenzen, da $\lim\limits_{k\to\infty} d(\Gamma_k) = 0$. Daher gibt es ein $k_0(S)$ so, daß für $k > k_0(S)$ die Ungleichung $n(k) > \dfrac{28}{c-1}$ erfüllt wird.

Nun sei $k > k_0(S)$ beliebig, aber fest, und ich betrachte $\mathfrak{S}_k$. Es gibt mindestens einen Halbstrahl H mit $n(H, k) = n(k)$ und somit

$$n_0 = n(H, k) = n(H) > \frac{28}{c-1}. \tag{37}$$

Das Koordinatensystem werde nun so gewählt, daß H in die x-Achse fällt. Die Normierung sei so, daß die Randpunkte von S auf der x-Achse Koordinaten $(1, 0)$ bzw. $(-1, 0)$ haben. Endlich darf man annehmen, daß die Gleichungen der beiden Stützgeraden parallel zur x-Achse $y = 1$ bzw. $y = -1$ lauten. Der (oder einer der) Punkt(e) am Rande von S auf $y = 1$ soll mit P bezeichnet werden. Die Strecke $S \cap \{y = \frac{1}{2}\}$ besitzt eine Länge $\mathfrak{L} > c$. Sie überragt das Dreieck $(1, 0)$, P, $(-1, 0)$, daher (mindestens) auf einer Seite um eine Strecke, deren Länge größer oder gleich $c - 1/2$ ist. Der Endpunkt von $S \cap \{y = \frac{1}{2}\}$ auf dieser Seite soll mit Q bezeichnet werden, der andere Endpunkt mit $\bar{Q}$. Man darf O.B.d.A. annehmen, daß der Vektor $\overrightarrow{\bar{Q}Q}$ in die positive x-Richtung weist. Uns interessiert nun, wie viele Gitterpunkte aus Γ_k im Parallelogramm $\mathfrak{P} = (1, 0)$, P, $(-1, 0)$, $-P$ liegen und weiter, wie viele Gitterpunkte im Inneren des Sechsecks $\mathfrak{s} = (1, 0), Q, P, (-1, 0), -Q, -P$ sind.

Der primitive Gitterpunkt von Γ_k auf der x-Achse habe Koordinaten $(x_0, 0)$. Man kann setzen $x_0 = 1/n_0 + \Delta_0$, wobei $0 < \Delta_0 \leqslant 1$ und n_0 die vorhin betrachtete Zahl $n_0 = n(k)$ ist. Das Gitter Γ_k werde nun von diesem Punkt sowie einem weiteren mit Koordinaten $(x_1, y_1) = (x_1, 1/m + \Delta)$ aufgespannt. Dabei soll m eine ganze, nicht negative Zahl sein und Δ reell mit $0 < \Delta \leqslant 1$. Es ist

$$\Delta^k(S) = d(\Gamma_k) = \frac{1}{n_0 + \Delta_0} \cdot \frac{1}{m + \Delta}. \tag{38}$$

Nun soll die Anzahl der Gitterpunkte von Γ_k, welche im Inneren von $\mathfrak{P}$ liegen, nach unten abgeschätzt werden. Auf der x-Achse liegen genau n_0 Punkte. (Statt „Punktepaar" soll wie bisher nur „Punkt" gesagt werden. Demgemäß werden im folgenden nur die Punkte in $y > 0$ gezählt werden. Der Ursprung wird nirgends mitgerechnet.) Die übrigen Gitterpunkte ordnen wir nach den Geraden $y = C$, auf denen sie liegen $(0 < C < 1)$. Die Strecke $\mathfrak{P} \cap \{y = C\}$ hat die Länge $2(1 - C)$. Da die Gitterpunkte auf $y = C$ Abstände der Länge $1/n_0 + \Delta_0$ haben, liegen im Inneren der Strecke mindestens $2(1 - C) \cdot (n_0 + \Delta_0) - 1$ Punkte. Für C kommen nur Werte $\nu/m + \Delta$ in Frage, wobei ν natürlich, $\nu < m + \Delta$ d. h. $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$. Bei festem ν sind auf der Geraden $y = \frac{\nu}{m + \Delta} = C$ mindestens $z(\nu) = 2\left(1 - \frac{\nu}{m + \Delta}\right)(n_0 + \Delta_0) - 1$ Punke, welche im Inneren von $\mathfrak{P}$ sind. Insgesamt sind daher mindestens A_0 Punkte im Inneren von $\mathfrak{P}$, wenn

$$A_0 = n_0 + \sum_{\nu=1}^{m} z(\nu) = n_0 + 2\,(m - \frac{m(m+1)}{2(m+\Delta)})\,(n_0+\Delta_0) - m.$$

Weiter soll die Anzahl der Gitterpunkte von Γ_k, welche im Inneren von $\mathfrak{F}$ liegen, nach unten abgeschätzt werden. Die Zahl ist mindestens $A_0 + B$, wenn B die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Dreiecks $(1, 0)$, Q, P bedeutet. Deswegen sollen die Punkte in diesem Dreieck $\mathfrak{D}$ betrachtet werden. Wieder werden die Punkte nach Geraden $y = C$ geordnet. Es sollen jene Punkte gezählt werden, die auf Geraden $y = C$ mit $^1/_4 \leqslant C \leqslant {}^3/_4$ liegen. Die Länge der Strecke $\mathfrak{D} \cap \{y = C\}$ ist unter dieser Voraussetzung mindestens gleich $c - 1/4$. Falls a die Zahl der Gitterpunkte im Inneren einer solchen Strecke bedeutet, so gilt

$$a \geqslant \frac{c-1}{4}\,(n_0 + \Delta_0) - 1 \geqslant \frac{c-1}{4}\,n_0 - 1 \geqslant 7 - 1 = 6$$

wegen (37).

Wie viele solche passende Werte C gibt es, daß auf der Geraden $y = C$ Gitterpunkte liegen? Es muß sein $C = \dfrac{\nu}{m+\Delta}$ und daher

$$^1/_4 \leqslant \frac{\nu}{m+\Delta} \leqslant {}^3/_4.$$

Für ν gibt es mindestens $2(m + \Delta) - 1 > \dfrac{m}{2} - 1$ Möglichkeiten. Es gibt daher mehr als $m + 1/6$ Möglichkeiten, sobald $m > 1$. Ist $m \geqslant 4$, so sieht man das sofort. Bei $m = 2$, $m = 3$ folgt es aus der Tatsache, daß die Zahl der Möglichkeiten eine ganze Zahl sein muß. Es gibt also mindestens $m + 1/6$ passende Gerade und auf jeder Geraden liegen mindestens 6 Gitterpunkte. Daraus folgt: $B \geqslant B_0 = m + 1$ und für die Gesamtzahl D der Gitterpunkte im Inneren von $\mathfrak{F}$

$$D \geqslant A_0 + B_0 = 2(m - \frac{m(m+1)}{2(m+\Delta)})\,(n_0 + \Delta_0) + n_0 + 1 \geqslant$$

$$\geqslant (n_0 + \Delta_0)\,(2\,m - \frac{m(m+1)}{2(m+\Delta)} + 1).$$

Ist nun $m = 1$, $\Delta \geqslant \dfrac{3}{n_0(c-1) - 3}$, so erhält man dieselbe Abschätzung für D.

Von $y = \dfrac{1}{1+\Delta}$ ragt nämlich mindestens eine Strecke der Breite

$(c-1)\,(1-\frac{1}{1+\Delta})$ ins Dreieck $\mathfrak{D}$. Darauf liegen im Inneren mindestens

$$(c-1)\,(1-\frac{1}{1+\Delta})\,(n_0+\Delta_0)-1$$

Punkte, wobei

$$(c-1)\,(1-\frac{1}{1+\Delta})\,(n_0+\Delta_0)-1>(c-1)\,(1-\frac{n_0(c-1)-3)}{n_0(c-1)})\,n_0-1\geqq 2.$$

Also ist auch in diesem Falle $B\geqq 2=1+1=m+1$ und

$$D\geqq(n_0+\Delta_0)\left\{2m-\frac{m(m+1)}{2(m+\Delta)}+1\right\}=$$

$$=(n_0+\Delta_0)\left\{2m-\frac{m(m+\Delta)}{(m+\Delta)}+\frac{m(\Delta-1)}{m+\Delta}+1\right\}=$$

$$=(n_0+\Delta_0)\left\{m+\frac{m}{m+\Delta}(\Delta-1)+1\right\}\geqq(n_0+\Delta_0)\,(m+\Delta). \tag{39}$$

(39) gilt daher allgemein für $m+\Delta\geqq 1+\frac{3}{n_0(c-1)-3}$. Doch (39) darf nicht eintreten: Γ_k ist k-kritisch und daher hat man $k>D\geqq$ $\geqq(n_0+\Delta_0)\,(m+\Delta)$. Daraus folgt wegen (38) $d(\Gamma_k)=\frac{1}{n_0+\Delta_0}\cdot\frac{1}{m+\Delta}>\frac{1}{k}$. Dies kann jedoch nicht sein, weil das Gitter mit den Basisvektoren $(1/k,\,0)$, $(0,\,1)$ k-zulässig ist und gilt $d(\Gamma)=\frac{1}{k}<d(\Gamma_k)=\Delta^k(S)$, was auf einen Widerspruch führt. Weil

$$m+\Delta\geqq 1+\frac{3}{n_0(c-1)-3}$$

aber (39) nach sich zieht, muß gelten

$$m+\Delta<1+\frac{3}{n_0(c-1)-3}.$$

Daraus folgt sofort

$$d(\Gamma_k)=\frac{1}{n_0+\Delta_0}\cdot\frac{1}{m+\Delta}>\frac{1}{n_0+\Delta_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n_0(c-1)-3}}$$

und wegen $k\geqq n_0$

$$k\,\Delta^k(S) = k\,d(\Gamma_k) \geqq \frac{n_0}{n_0+\Delta_0}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{n_0(c-1)-3}} = \frac{1}{1+\dfrac{\Delta_0}{n_0}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{n_0(c-1)-3}}.$$

Dies alles gilt für $k \geqq n_0(S)$.

Das Parallelogramm, welches begrenzt wird von den Geraden $y=1$, $y=-1$ und einer Stützgeraden an S in $(1,0)$ bzw. der gespiegelten Stützgeraden an $(-1,0)$ ist S umschrieben, sein Inhalt ist 4. Daher gilt $J_p(S) \leqq 4$. Folglich ist

$$k\,\Delta^k(S) \geqq \frac{1}{1+\dfrac{\Delta_0}{n_0}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{n_0(c-1)-3}}\cdot\frac{J_p(S)}{4}.$$

Da Δ_0 beschränkt ist und $n_0 = n(k)$ mit k über alle Grenzen wächst, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} k\,\Delta^k(S) \geqq \dfrac{J_p(S)}{4}$.

Anderseits hat man $k\,\Delta^k(S) \leqq \dfrac{J_p(S)}{4}$. Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} k\,\Delta^k(S) = \frac{J_p(S)}{4}. \tag{36}$$

Bemerkungen: I. Für den Kreis wurde Δ^k von *K. Prachar*[7] für $k>k_0$ angegeben. Ist der Radius des Kreises 1, so ist $\Delta^k = \dfrac{1}{k^2}\sqrt{k^2-1/4}$, daher $k\,\Delta^k = \dfrac{\sqrt{k^2-1/4}}{k}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} k\,\Delta^k = 1 = \dfrac{J_p(S)}{4}$.

II. Beim regelmäßigen Sechseck $\mathfrak{s}$ ist $J_p(\mathfrak{s}) = 4/3\,J(\mathfrak{s})$, daher

$$\square(\mathfrak{s}) = 4/3 \cdot 1/4\,J(\mathfrak{s}) = 1/3\,J(\mathfrak{s}).$$

III. Allgemein ist für konvexe Körper im R_n leicht zu beweisen: Die einzigen konvexen Körper, die Maximalkörper im R_n für mehr als endlich viele k sind, sind Prismen, deren Basen Maximalkörper im R_{n-1} sind. Im R_3 sind dies das Parallelepiped und das regelmäßige, sechsseitige Prisma.

[7] Monatshefte f. Math., **53**, S. 268—277 (1949).

Satz 10. *Es gilt für jedes k die Ungleichung*

$$k\,\Delta^k(S) \leqslant \frac{V(S)}{2} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu^n}}{\zeta(n)}.$$

Dieser Satz wurde für $k = 1$ zuerst gezeigt von E. Hlawka[8]*, für beliebige k später verallgemeinert*[9]*. Der hier gebrachte Beweis ist ähnlich dem Beweis von C. A. Rogers*[10] *bei $k = 1$.*

Beweis von Satz 10. Zunächst sei $\varepsilon > 0$ fest. Mit Γ_ε bezeichnen wir das Gitter der Punkte, deren Koordinaten ganzzahlige Vielfache von ε sind. $m(\varepsilon)$ soll die Anzahl der Gitterpunkte $\mathfrak{G} \in \Gamma_\varepsilon$ im Inneren von S angeben, welche $\tau(\mathfrak{G}) \leqslant k$ erfüllen. Endlich soll $p = p(\varepsilon)$ die größte Primzahl sein, welche $\varepsilon^n\, p(\varepsilon) < \Delta^k(S)$ erfüllt. Nach dem Primzahlsatz ist $\lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = 1$ und daher

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^n\, p(\varepsilon) = \Delta^k(S). \tag{40}$$

Da S beschränkt ist, kann man R so groß wählen, daß S im Würfel $|x_i| < R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ enthalten ist. Wählen wir nun $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $\varepsilon\, p(\varepsilon) > R$ für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Falls nun $\mathfrak{G}$ ein Punkt von Γ_ε, so ist $\mathfrak{G} \cdot p(\varepsilon)$ nicht in diesem Würfel. Es ist $d(\Gamma_\varepsilon) \cdot p(\varepsilon) < \Delta^k(S)$. Nach Satz 6 ist daher $pz(\mathfrak{S}_0) + z(\mathfrak{S}_1) \geqslant kl$, wenn $l = p + 2 - k$, weil dann $p \geqslant k + l - 2$. Da aber $p(\varepsilon) \cdot \mathfrak{G}$ nicht in S, daher nicht in $\mathfrak{S}$, muß $z(\mathfrak{S}_0) = 0$ sein und wir erhalten $z(\mathfrak{S}_1) \geqslant k(p(\varepsilon) + 2 - k)$. Doch ist $m(\varepsilon) = z(\mathfrak{S}_1)$ und daher $m(\varepsilon) \geqslant k(p(\varepsilon) + 2 - k)$. Somit ist

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^n\, m(\varepsilon) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^n (p(\varepsilon) + 2 - k)\, k = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n\, p(\varepsilon) \cdot k = k\,\Delta^k(S) \tag{41}$$

wegen (40).

Bedeutet $m_\nu(\varepsilon)$ die Zahl der Gitterpunkte im Inneren von S aus Γ_ε mit $\tau(\mathfrak{G}) = \nu$, so ist

$$\varepsilon^n\, m_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^n\, m_1(\nu\varepsilon) = \frac{1}{\nu^n}\,(\nu\varepsilon)^n \cdot m_1(\nu\varepsilon).$$

Da S Jordan — meßbar ist, gilt hier

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^n\, m_1(\varepsilon) = \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)}$$

[8] Mathem. Zeitschrift **49**, S. 285—312 (1943/44).
[9] Math. Analen **125**, S. 183—207 (1952).
[10] *J. London* math. Soc. **26**, 307 (1951).

wie von *C. A. Rogers*[11] gezeigt wurde.

Daraus folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^n m_\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\nu^n} \cdot \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)}.$$

Unser vorhin eingeführtes $m(\varepsilon)$ ist aber nichts anderes als

$$m(\varepsilon) = m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_k(\varepsilon).$$

Daraus folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^n m(\varepsilon) = \frac{V(S)}{2} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu^n}}{\zeta(n)}.$$

Daraus und aus (41) ergibt sich

$$k\,\Delta^k(S) \leqslant \frac{V(S)}{2} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu_n}}{\zeta(n)}.$$

w.z.b.w.

[11] Annals of Math., **48**, S. 994—1002 (1947), Lemma S. 998.

Über die Formengruppe.

Von

Wilfried Nöbauer, Wien.

(Eingelangt am 12. Mai 1955.)

Einleitung: In einer früheren Arbeit [1] wurde von mir die Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$ aller der Restklassen nach dem Ideal der Restpolynomvektoren mod n im Ring Γ_k aller ganzzahligen Polynomvektoren betrachtet, deren Polynomvektoren eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Vektorraumes V_n der Stufe k über den Restklassenring mod n erzeugen. Es wurde dort unter anderem darauf hingewiesen, daß in $\mathfrak{G}_n^k$ alle die Elemente, welche einen aus lauter Formen gleichen Grades bestehenden Polynomvektor als Repräsentanten haben, eine Untergruppe $\mathfrak{F}_n^k$ bilden; diese Gruppe wird hier als Formengruppe bezeichnet und näher untersucht. Es ergibt sich dabei zunächst, daß vor allem der Fall eines quadratfreien n von Interesse ist, da nur in diesem Falle auch aus nichtlinearen Formen gebildete Vektoren als Vertreter vorkommen können. Es zeigt sich, daß dann $\mathfrak{F}_n^k$ zerfallende Erweiterung der Untergruppe $\mathfrak{E}_n^k$ ist, welche aus allen Elementen mit einem Polynomvektor aus Formen vom Grad $t\bar{n}+1$ als Vertreter besteht, und die Faktorgruppe $\mathfrak{F}_n^k \mid \mathfrak{E}_n^k$ ist die prime Restklassengruppe mod $\bar{n}$, wenn $\bar{n}$ das k.g.V. der φ-Funktionen aller Primfaktoren von n bedeutet. $\mathfrak{E}_n^k$ wiederum ist direktes Produkt der $\mathfrak{E}_p^k$ zu den Primfaktoren von n; für den Fall einer Primzahl p ergibt sich, daß $\mathfrak{E}_p^k$ isomorph zur Symmetrie $\Sigma_\varkappa(Z_{p-1})$ ist, wobei $\varkappa = \dfrac{p^k-1}{p-1}$ und Z_{p-1} die zyklische Gruppe der Ordnung $p-1$ ist. Es zeigt sich auch, daß die betrachteten Gruppen in gewissem Zusammenhang stehen mit einer ganz anders erklärten Klasse von Permutationsgruppen, deren Angehörige aus bestimmten eineindeutigen Abbildungen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich bestehen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß zum Verständnis dieser Arbeit die Kenntnis des § 1 von [1] notwendig ist. Falls andere Ergebnisse aus

dieser Arbeit verwendet werden, wird dies aber angegeben; ebenso auch, wenn Sätze aus einer anderen Arbeit [2] von mir benötigt werden; diese stammen aber alle aus § 1 der Arbeit.

§ 1. Wir betrachten den Ring Γ_k der Polynomvektoren in k Unbestimmten. Wir bezeichnen einen Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x}) \in \Gamma_k$ als Formenvektor vom Grad t, wenn jede seiner Komponenten eine Form vom Grad t ist und schreiben dann $[\mathfrak{a}] = t$. Man sieht leicht, daß mit zwei Formenvektoren $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{b}(\mathfrak{x})$ auch der Polynomvektor $\mathfrak{c}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}(\mathfrak{x}))$ ein Formenvektor ist, wobei gilt:

$$[\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}]\,[\mathfrak{b}]. \tag{1}$$

Nun betrachten wir alle die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$, welche mindestens einen Formenvektor als Vertreter besitzen. Diese Menge ist nicht leer, denn das Einheitselement von $\mathfrak{G}_n^k$ ist so ein Element, und mit A und B gehört nach dem vorhin Festgestellten auch AB zu dieser Menge; da $\mathfrak{G}_n^k$ eine endliche Gruppe ist, haben wir damit

Satz I: *In $\mathfrak{G}_n^k$ bilden die Elemente, welche mindestens einen Formenvektor als Vertreter enthalten, eine Untergruppe $\mathfrak{F}_n^k$, die wir die Formengruppe nennen wollen.*

Wir verwenden nun folgende beiden Sätze, welche als Teilaussagen in den Hilfssätzen 1 und 2 von [1] enthalten sind:

a) Ein Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erzeugt nur dann ein volles Vektorsystem mod $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, wenn er sowohl mod a, als auch mod b ein solches erzeugt.

b) Ein Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erzeugt nur dann ein volles Vektorsystem mod $n = p^e$ (p Primzahl, $e > 1$), wenn für seine Funktionaldeterminante gilt:

$D\,\mathfrak{a}(\mathfrak{k}) \not\equiv 0 \bmod p$ für jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{k}$.

Mit Hilfe dieser Sätze beweisen wir

Satz II: *Ist n nicht quadratfrei, dann ist $\mathfrak{F}_n^k$ identisch mit der Gruppe $\mathfrak{R}_n^k$, bestehend aus allen Elementen von $\mathfrak{G}_n^k$ mit einem Vertretervektor der Gestalt $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = A\,\mathfrak{x}$ (A quadratische Matrix mit k Zeilen).*

Man sieht nämlich zunächst leicht, daß $\mathfrak{R}_n^k$ für beliebiges n tatsächlich eine Gruppe bildet, für die stets gilt $\mathfrak{R}_n^k \subseteq \mathfrak{F}_n^k$. Ist nun aber n nicht quadratfrei, $F \in \mathfrak{F}_n^k$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein Formenvektor aus F, so erzeugt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod n, nach a) daher auch ein volles Vektorsystem mod p^e mit $e > 1$ für mindestens eine Primzahl p, daher gilt nach b) insbesondere

$$D\,\mathfrak{f}(\mathfrak{o}) \not\equiv 0 \bmod p \qquad \mathfrak{o}\ \text{Nullvektor}. \tag{2}$$

Es gilt nun sicher $[\mathfrak{f}] \geqq 1$; wäre aber $[\mathfrak{f}] > 1$, so wäre, wie leicht einzusehen ist, (2) nicht erfüllt, also gilt $[\mathfrak{f}] = 1$ und daher auch $\mathfrak{F}_n^k \subseteqq \mathfrak{R}_n^k$.

§ 2. Es sei $n = \overset{r}{\underset{i=1}{\Pi}} p_i$ die Primzahlzerlegung der quadratfreien Zahl n. Wir untersuchen die Formengruppe $\mathfrak{F}_n^k$.

Hilfssatz 1: *Ist* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *ein Formenvektor des Elementes* $F \in \mathfrak{F}_n^k$ *vom Grad* t *und gilt* $1 \leqq \nu \leqq k$, *ist weiter* p *einer der Primteiler von* n, *so gibt es stets mindestens eine Komponente von* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, *in welcher der Koeffizient* c *von* x_ν^t *die Beziehung*:

$$c \not\equiv 0 \bmod p$$

erfüllt.

Beweis: $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ erzeugt ein volles Vektorsystem mod n, daher auch ein volles Vektorsystem mod p. Wäre nun $c \equiv 0 \bmod p$ in jeder Komponente von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, so wäre

$$\mathfrak{f}(0, 0 \ldots 1 \ldots 0) \equiv \mathfrak{o} \bmod p$$

was wegen $\mathfrak{f}(\mathfrak{o}) \equiv \mathfrak{o} \bmod p$ nicht sein kann.

So wie in [2] bilden wir uns zur Zahl n die Zahl $\bar{n} = [p_i - 1]$, das k.g.V. der φ-Funktionen aller Primteiler von n. Nun beweisen wir

Hilfssatz 2: *Sind* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *und* $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ *Formenvektoren des Elementes* $F \in \mathfrak{F}_n^k$, *dann gilt* $[\mathfrak{f}] \equiv [\bar{\mathfrak{f}}] \bmod \bar{n}$.

Wir setzen $[\mathfrak{f}] = t$ und $[\bar{\mathfrak{f}}] = \bar{t}$. Es sei $f_m(\mathfrak{x})$ eine Komponente von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, in welcher der Koeffizient c von x_1^t die Beziehung $c \not\equiv 0 \bmod p_i$ für irgendeinen Primteiler p_i von n erfüllt. Bildet man mit der entsprechenden Komponente $\bar{f}_m(\mathfrak{x})$ von $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ die Differenz $f_m(\mathfrak{x}) - \bar{f}_m(\mathfrak{x})$, so erhält man ein Restpolynom mod n, also ein Restpolynom mod p_i. Setzt man in dieses den Vektor $(1, 0, 0 \ldots 0)$ ein, so sieht man, daß der Koeffizient $\bar{c}$ von $x_1^{\bar{t}}$ in $\bar{f}_m(\mathfrak{x})$ die Kongruenz

$$\bar{c} \equiv c \bmod p_i \tag{3}$$

erfüllt, und durch Einsetzen der Vektoren $(x, 0, 0 \ldots 0)$ erkennt man, daß $cx_1^t - \bar{c}x_1^{\bar{t}}$, also wegen (3) auch $x_1^t - x_1^{\bar{t}}$ Restpolynom mod p_i ist. Daraus folgt aber, daß $t \equiv \bar{t} \bmod p_i - 1$ gilt, und da p_i beliebig war, gilt

$$t \equiv \bar{t} \bmod \bar{n} \qquad \text{w.z.z.w.}$$

Hilfssatz 3: *Ist* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *ein Formenvektor des Elementes* $F \in \mathfrak{F}_n^k$, *so gilt stets* $([\mathfrak{f}], \bar{n}) = 1$.

Beweis: Wir setzen wieder $[\mathfrak{f}] = t$. Für beliebiges ganzes w und ganzes $\mathfrak{u}$ gilt ersichtlich

$$\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{u}) = w^t\,\mathfrak{f}(\mathfrak{u}) \tag{4}$$

insbesondere also auch

$$\mathfrak{f}(w, 0 \ldots 0) = w^t\, \mathfrak{f}(1, 0 \ldots 0).$$

Wäre also $w^t \equiv \overline{w}^t \bmod n$ für $w \not\equiv \overline{w} \bmod n$, so würde $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ kein volles Vektorsystem mod n erzeugen, daher erzeugt x^t ein volles Restsystem mod n, woraus sich, wie zu Anfang von [2] bewiesen wurde, die Beziehung $(t, \bar{n}) = 1$ ergibt.

Diese Hilfssätze verwenden wir zum Beweis des folgenden

Satz III: *Die Gruppe $\mathfrak{F}_n^k$ läßt sich stets homomorph abbilden auf die prime Restklassengruppe mod $\bar{n}$.*

Beweis: Ist $F \in \mathfrak{F}_n^k$, so nehmen wir irgendeinen Formenvektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ aus F und ordnen dem F die Restklasse $[\mathfrak{f}]$ mod $\bar{n}$ als Bild zu. Nach den Hilfssätzen 2 und 3 ist dieses Bild tatsächlich eine eindeutig bestimmte prime Restklasse mod $\bar{n}$. Ist $u > 0$ Vertreter irgendeiner primen Restklasse, so ist

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_1^u, x_2^u \ldots x_k^u) \tag{5}$$

Formenvektor eines Elementes $G \in \mathfrak{F}_n^k$, das die durch u vertretene Restklasse zum Bild hat. (Daß $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod n erzeugt, folgt leicht aus den Ergebnissen des § 1 von [2]). Daß schließlich dem Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{F}_n^k$ das Produkt ihrer Bildrestklassen mod $\bar{n}$ zugeordnet ist, ergibt sich fast unmittelbar aus (1).

Bei dieser homomorphen Abbildung werden genau die Elemente aus $\mathfrak{F}_n^k$ auf die Restklasse 1 mod $\bar{n}$ abgebildet, welche mindestens einen Formenvektor $\mathfrak{e}(\mathfrak{x})$ mit $[\mathfrak{e}] \equiv 1 \bmod \bar{n}$ enthalten. Alle diese Elemente bilden einen Normalteiler $\mathfrak{E}_n^k$ von $\mathfrak{F}_n^k$. Läßt man in (5) das u ein positives Vertretersystem der primen Restklassengruppe mod $\bar{n}$ durchlaufen, so erhält man $\varphi(\bar{n})$ Formenvektoren; die durch sie repräsentierten Elemente aus $\mathfrak{F}_n^k$ bilden ein genaues Vertretersystem der Faktorgruppe $\mathfrak{F}_n^k \mid \mathfrak{E}_n^k$, sie bilden aber auch selbst eine Untergruppe $\mathfrak{P}_n$ von $\mathfrak{F}_n^k$, und es gilt $\mathfrak{F}_n^k = \mathfrak{P}_n \mathfrak{E}_n^k$. Wir fassen diese Tatsachen zusammen in folgendem

Satz IIIa: *In $\mathfrak{F}_n^k$ bilden alle die Elemente, deren Formenvektoren $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ die Bedingung $[\mathfrak{f}] \equiv 1$ mod $\bar{n}$ erfüllen, einen Normalteiler $\mathfrak{E}_n^k$. Die Gruppe $\mathfrak{F}_n^k$ ist eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{E}_n^k$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{F}_n^k \mid \mathfrak{E}_n^k$ ist isomorph zur primen Restklassengruppe mod $\bar{n}$.*

§ 3. Bevor wir die Gruppe $\mathfrak{E}_n^k$ näher untersuchen, wollen wir einige allgemeinere Überlegungen anstellen, welche $\mathfrak{E}_n^k$ mit anderen Gruppen in Beziehung setzen. Dabei können wir die Voraussetzung, daß n eine quadratfreie Zahl ist, wieder fallen lassen, wenn wir $\mathfrak{E}_n^k = \mathfrak{F}_n^k$ für nicht quadratfreies n setzen.

Wie in § 1 von [1] gezeigt wurde, ist die Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$ isomorph zu der Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_n^k$ der $\mathfrak{S}_{n^k}$, die aus den durch die Polynomvektoren von $\mathfrak{G}_n^k$ erzeugten eineindeutigen Abbildungen des k-stufigen Vektorraumes V_n über den Restklassenring mod n auf sich besteht. Das isomorphe Bild von $\mathfrak{E}_n^k$ bei dieser Abbildung bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{E}}_n^k$ und seine Elemente mit $\Phi, \Psi \ldots\ldots$. Ist nun etwa Φ Bild von $F \in \mathfrak{E}_n^k$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Formenvektor von F und $\mathfrak{a} \in V_n$, so gilt[1] also:

$$\Phi \mid \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod n.$$

Ist daher w irgendeine ganze Zahl, so gilt:

$$\Phi \mid w\,\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) = w^{\overline{t^n+1}}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \equiv w \,.\, \Phi \mid \mathfrak{a} \mod n$$

es ist dabei $t = 0$ bei nicht quadratfreiem n, und für quadratfreies n ist zu berücksichtigen, daß $w^{\overline{t^n+1}} \equiv w \bmod n$ für jedes ganze w gilt (man vergleiche [2].)

Nun bildet aber auch die Gesamtheit der umkehrbar eindeutigen Abbildungen von V_n auf sich, welche die Bedingung

$$\eta \mid w\,\mathfrak{a} = w \,.\, \eta \mid \mathfrak{a} \tag{6}$$

für jedes Paar $\mathfrak{a}$, w erfüllen, eine Untergruppe in der Gruppe aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen von V_n auf sich, also der $\mathfrak{S}_{n^k}$. Denn ist ϑ eine weitere Abbildung dieser Art, so haben wir:

$$\vartheta\,\eta \mid w\,\mathfrak{a} = \vartheta \mid \eta \mid w\,\mathfrak{a} = \vartheta \mid w \,.\, \eta \mid \mathfrak{a} = w \,.\, \vartheta\,\eta \mid \mathfrak{a}$$

und mehr braucht man wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{S}_{n^k}$ nicht zu zeigen. Diese Untergruppe der $\mathfrak{S}_{n^k}$ wollen wir mit $\mathfrak{U}_n^k$ bezeichnen und Gruppe der multiplikativen V_n-Permutationen nennen.

Wir bilden nun die Gruppe

$$\overline{\mathfrak{B}}_n^k = \mathfrak{U}_n^k \cap \overline{\mathfrak{G}}_n^k$$

Diese Gruppe besteht also gerade aus den multiplikativen V_n-Permutationen, welche sich mit Hilfe eines ganzzahligen Polynomvektors $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ in der Gestalt

$$\varphi \mid \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod n$$

[1] Wenn man es ganz genau nimmt, muß man statt $\mathfrak{a}$, der ja ein Vektor mit Restklassen mod n als Komponenten ist, einen ganzzahligen Vertretervektor $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ einsetzen. Es ist dann $\Phi \mid \mathfrak{a}$ der durch $\mathfrak{f}(\bar{\mathfrak{a}})$ vertretene Vektor aus V_n. Der Einfachheit halber wollen wir aber zwischen den Elementen aus V_n und ihren Vertretern keinen Unterschied machen.

schreiben lassen. Nach dem oben Festgestellten ist nun $\overline{\mathfrak{E}}_n^k$ eine Untergruppe von $\mathfrak{V}_n^k$, so daß wir also folgende Lagebeziehung zwischen den betrachteten Gruppen haben:

$$\overline{\mathfrak{E}}_n^k \subseteq \overline{\mathfrak{V}}_n^k \subseteq \mathfrak{U}_n^k \subseteq \mathfrak{S}_{n^k}$$

Bemerkung: Die Gruppe $\mathfrak{U}_n^k$ ist Spezialfall einer weit allgemeineren Klasse von Gruppen. Ist nämlich $\mathfrak{G}$ irgendeine (multiplikativ geschriebene) endliche oder unendliche Gruppe, so greife man aus der Gesamtheit aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich alle jene Abbildungen ψ heraus, welche die Gleichung

$$\psi \mid A^n = (\psi \mid A)^n$$

für jedes $A \in \mathfrak{G}$ und jedes ganze n erfüllen. Daß diese Abbildungen eine Gruppe $\omega(\mathfrak{G})$ bilden, ist leicht einzusehen, ebenso sieht man gleich, daß diese Gruppe die Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$ enthält. Wählt man nun für $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe V_n, also die direkte Summe von k additiven zyklischen Gruppen der Ordnung n, so ergibt sich als $\omega(\mathfrak{G})$ die Gruppe $\mathfrak{U}_n^k$.

§ 4. Wir nehmen nun an, daß n Produkt zweier teilerfremder Zahlen sei, untersuchen für diesen Fall das Verhalten von $\mathfrak{V}_n^k$ (dem Bild von $\overline{\mathfrak{V}}_n^k$ in $\mathfrak{G}_n^k$) und $\mathfrak{E}_n^k$ und beweisen darüber folgenden Satz:

Satz IV: *Ist $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, so besteht die Isomorphiebeziehung $\mathfrak{V}_n^k \sim \mathfrak{V}_a^k \times \mathfrak{V}_b^k$ und falls n quadratfrei ist, auch die Isomorphiebeziehung $\mathfrak{E}_n^k \sim \mathfrak{E}_a^k \times \mathfrak{E}_b^k$.*

a) Beweis für $\mathfrak{V}_n^k$: Wir sehen uns an, was bei der nach § 4 aus [1] möglichen Faktorzerlegung $\mathfrak{G}_n^k \sim \mathfrak{G}_a^k \times \mathfrak{G}_b^k$ mit den Elementen von $\mathfrak{V}_n^k$ geschieht. Ist etwa $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Vertreter für $F \in \mathfrak{V}_n^k$, so gilt nach Definition von $\mathfrak{V}_n^k$:

$$\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \mod n$$

für jedes ganze w und jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{a}$, daher auch

$$\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \mod a \text{ und } \mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \mod b$$

Die Faktoren F_a und F_b, in die F bei der Zerlegung von $\mathfrak{G}_n^k$ zerfällt, werden nun aber beide durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ vertreten, gehören daher zu $\mathfrak{V}_a^k$ bzw. zu $\mathfrak{V}_b^k$.

Ist aber umgekehrt ein Paar $F_a \in \mathfrak{V}_a^k$, $F_b \in \mathfrak{V}_b^k$ mit den Vertretervektoren $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ bzw. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ gegeben, so wird das Element F von $\mathfrak{G}_n^k$, welches in die Faktoren F_a, F_b zerfällt, vertreten durch den Polynomvektor

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = u\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + v\,\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$$

wobei u, v Lösungen folgender Kongruenzsysteme sind:

$$u \equiv 1 \bmod a \qquad v \equiv 0 \bmod a$$

$$u \equiv 0 \bmod b \qquad v \equiv 1 \bmod b$$

Wir haben

$$\mathfrak{h}(w\,\mathfrak{a}) = u\,\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) + v\,\mathfrak{g}(w\,\mathfrak{a})$$

Es ist aber

$$\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod a \qquad \mathfrak{g}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \bmod b$$

daher auch

$$u\,\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv u\,w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod a \qquad v\,\mathfrak{g}(w\,\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{o} \equiv v\,w\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \bmod a$$

$$u\,\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{o} \equiv u\,w\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod b \qquad v\,\mathfrak{g}(w\,\mathfrak{a}) \equiv v\,w\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \bmod b$$

also

$$u\,\mathfrak{f}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,u\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \bmod ab \qquad v\,\mathfrak{g}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w\,v\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \bmod ab$$

daher

$$\mathfrak{h}(w\,\mathfrak{a}) \equiv w(u\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) + v\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a})) \equiv w\,\mathfrak{h}(\mathfrak{a}) \bmod n$$

für jedes Paar w, $\mathfrak{a}$. Daher gehört F tatsächlich zu $\mathfrak{V}_n^k$, womit der Beweis erbracht ist.

Bevor wir den Beweis für $\mathfrak{E}_n^k$ führen, müssen wir einen Hilfssatz formulieren und beweisen, nämlich

Hilfssatz 4: Ist n eine quadratfreie Zahl und F ein Element aus $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^n$, welches eine Form vom Grad $r > 0$ als Vertreter enthält, so enthält es auch eine Form vom Grad $r + t\,\bar{n}$, wenn $t \geqq 0$ beliebig gegeben ist.

Es gilt ja doch, wie nach § 1 von [2] sofort einzusehen ist, für jedes v und jedes $r > 0$ die Beziehung

$$x_v^r \equiv x_v^{r+t\bar{n}} \bmod A^n \tag{7}$$

Ersetzt man also in jedem Glied der Form vom Grad r die Potenz einer der darin vorkommenden Unbestimmten durch die um $t\,\bar{n}$ vermehrte Potenz, so erhält man eine Form vom Grad $r + t\,\bar{n}$, welche auch in dem Element F enthalten ist.

b) Beweis für $\mathfrak{E}_n^k$: Wir gehen wieder von der Faktorzerlegung $\mathfrak{G}_n^k \sim \mathfrak{G}_a^k \times \mathfrak{G}_b^k$ aus und betrachten ihre Wirkung auf die Elemente von $\mathfrak{E}_n^k$. Es sei $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ Formenvektor für $G \in \mathfrak{E}_n^k$; $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ist dann Vertreter für G_a und G_b, und es gilt

$$[\mathfrak{g}] \equiv 1 \bmod \bar{n}$$

Wie man sofort erkennt, ist nun aber $\bar{n} \equiv 0 \bmod \bar{a}$ und $\bar{n} \equiv 0 \bmod \bar{b}$, daher gilt

$$[\mathfrak{g}] \equiv 1 \mod \bar{a} \qquad [\mathfrak{g}] \equiv 1 \mod \bar{b}$$

Es gehört daher G_a zu $\mathfrak{E}_a^k$ und G_b zu $\mathfrak{E}_b^k$.

Nun sei umgekehrt $G_a \in \mathfrak{E}_a^k$ mit dem Formenvektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ als Vertreter und $G_b \in \mathfrak{E}_b^k$ mit dem Formenvektor $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ als Vertreter gegeben. Ich wähle eine Zahl y mit folgenden Eigenschaften:

$$y > [\mathfrak{f}] \qquad y > [\mathfrak{g}] \qquad y \equiv 1 \mod \bar{n} \tag{8}$$

Diese Zahl erfüllt $y \equiv 1 \mod \bar{a}$ und $y \equiv 1 \mod \bar{b}$, also auch

$$y = [\mathfrak{f}] + t_1 \bar{a} \qquad y = [\mathfrak{g}] + t_2 \bar{b} \qquad (t_1, t_2 > 0)$$

Nach Hilfssatz 4 kann man daher in G_a einen Formenvektor $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ und in G_b einen Formenvektor $\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})$ auswählen, welche beide den Grad y haben. Wir bilden uns nun mit den oben erklärten Zahlen u und v den Polynomvektor

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = u\,\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) + v\,\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})$$

Dieser Formenvektor vom Grad y vertritt das Element von $\mathfrak{G}_n^k$, dessen Faktoren G_a und G_b sind und wegen (8) gehört dieses Element zu $\mathfrak{E}_n^k$.

§ 5. Uns geht es vor allem darum, den Aufbau von $\mathfrak{E}_n^k$ festzustellen. Wir können uns dabei nach Satz II auf quadratfreie Zahlen n beschränken und nach Satz IV haben wir vor allem den Fall zu betrachten, daß $n = p$ eine Primzahl ist. Den Zugang zu der Untersuchung dieses Falles ermöglicht uns folgender

Hilfssatz 5: Die Menge $\mathfrak{M}$ der Elemente des Restklassenringes $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^p$, welche entweder das Polynom 0 oder eine nichtkonstante Form $f(\mathfrak{x})$ mit einem Grad $[f] \equiv 1 \mod p - 1$ als Vertreter enthalten, und die Menge $\mathfrak{N}$ der Elemente von $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^p$, deren Polynome eine eindeutige Abbildung ψ des k-stufigen Vektorraumes V_p über den Primkörper Π mod p auf Π mit der Eigenschaft

$$\psi \mid w\,\mathfrak{a} = w \,.\, \psi \mid \mathfrak{a} \text{ für alle } \mathfrak{a} \in V_p \text{ und } w \in \Pi \tag{9}$$

erzeugen, sind identisch.

Den Beweis führen wir, indem wir uns zunächst überlegen, daß $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ gilt und dann die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}$ und die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{N}$ abzählen; es wird sich zeigen, daß diese beiden Zahlen gleich groß sind.

a) Ist $U \in \mathfrak{M}$ und $u(\mathfrak{x})$ ein Vertreter der in Hilfssatz 5 angegebenen Gestalt, so läßt sich die von den Polynomen von U erzeugte Abbildung ψ schreiben als

$$\psi \mid \mathfrak{a} = u(\mathfrak{a})$$

Daß ψ die Eigenschaft (9) hat, sieht man nun leicht ein, wenn man bedenkt, daß für eine Form $u(\mathfrak{x})$ vom Grad $1 + n(p-1)$ mit $n \geqq 0$ über Π gilt:

$$u(w\,\mathfrak{a}) = w^{1+n(p-1)}\,u(\mathfrak{a}) = w\,u(\mathfrak{a})$$

b) Wir haben nun die Anzahl $o(\mathfrak{M})$ der Elemente von $\mathfrak{M}$ zu ermitteln. Ist wieder $U \in \mathfrak{M}$, so nehmen wir einen Vertreter $u(\mathfrak{x})$ der in Hilfssatz 5 angegebenen Art. Wir erinnern uns nun an die Beziehung (7), in der jetzt $\bar{n} = p-1$ zu setzen ist, und erkennen daraus, daß wir in jedem Glied von $u(\mathfrak{x})$ alle Potenzexponenten $\varrho > 0$ der Unbestimmten durch ihre kleinsten positiven Reste mod $p-1$ ersetzen können, ohne aus U herauszukommen. Wir erhalten auf diese Art einen neuen Vertreter $v(\mathfrak{x})$ für U, welcher folgende Eigenschaft besitzt: Ist $c\,x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,\ldots\,x_k^{\alpha_k}$ mit $c \neq 0$ ein tatsächlich in $v(\mathfrak{x})$ vorkommendes Glied, so gilt:

$$0 < c < p,\ 0 \leqq \alpha_i \leqq p-1,\ 0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \equiv 1 \bmod (p-1) \quad (10)$$

Ist umgekehrt ein Polynom $v(\mathfrak{x}) \neq 0$ mit dieser Eigenschaft gegeben und t sein Grad, so gilt $t \equiv 1 \bmod p-1$; durch Anwendung von (7) kann man aus $v(\mathfrak{x})$ eine Form $u(\mathfrak{x})$ vom Grad t gewinnen, welche $u(\mathfrak{x}) \equiv v(\mathfrak{x}) \bmod A^p$ erfüllt. Daß zwei Polynome mit der Eigenschaft (10) nur dann in derselben Restklasse nach A^p liegen, wenn sie identisch sind, folgt sofort aus Hilfssatz 8 von [1].

Wir erhalten also ein genaues Vertretersystem von $\mathfrak{M}$, wenn wir alle Polynome mit der Eigenschaft (10) bilden. Die Anzahl dieser Polynome ist aber offensichtlich gegeben durch $p^{\varkappa}$ (für jeden Koeffizienten, der $\neq 0$ werden darf, bestehen ja genau p Möglichkeiten), wenn $\varkappa$ die Anzahl der Lösungen des Systemes

$$0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \equiv 1 \bmod p-1 \qquad 0 \leqq \alpha_i \leqq p-1 \quad (11)$$

bezeichnet.

Um die Lösungen dieses Systemes zu zählen, ordnen wir sie, indem wir die Lösungen zusammenfassen, bei denen

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_r} = 0, \text{ alle anderen } \alpha_\varrho \neq 0 \quad (12)$$

sind. Die Anzahl der Lösungen von dieser Art ist offensichtlich gleich der Lösungszahl von

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-r} \equiv 1 \bmod p-1 \qquad 1 \leqq \alpha_i \leqq p-1 \quad (12a)$$

und die Lösungszahl von (12a) wiederum ist gleich der Lösungszahl von

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-r} = 1$$

im Restklassenring mod $p-1$, also gleich $(p-1)^{k-r-1}$. Wollen wir die Gesamtzahl der Lösungen von (11) erhalten, so müssen wir in (12) alle Kombinationen $(i_1, i_2 \ldots i_r)$ für die Werte $0 \leqq r \leqq k-1$ einsetzen, jedesmal die Lösungszahl bestimmen und diese Lösungszahlen addieren; wir erhalten also

$$\varkappa = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} (p-1)^{k-r-1}$$

daraus folgt

$$(p-1)\,\varkappa = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} (p-1)^{k-r} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{k-r} (p-1)^{k-r} =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} (p-1)^{s} = (1+p-1)^{k} - 1 = p^{k} - 1$$

also

$$\varkappa = \frac{p^{k}-1}{p-1} \text{ und } o(\mathfrak{M}) = p^{\varkappa} \tag{13}$$

c) Um $o(\mathfrak{M})$ zu bestimmen, bedenken wir zunächst, daß sich nach dem schon erwähnten Hilfssatz 8 von [1] jede eindeutige Abbildung von V_p auf Π durch ein Polynom $g(\mathfrak{x}) \in \Pi[\mathfrak{x}]$ in der Form $\mathfrak{a} \to g(\mathfrak{a})$ darstellen läßt, so daß also $o(\mathfrak{M})$ die Anzahl aller eindeutigen Abbildungen von V_p auf Π mit der Eigenschaft (9) ist.

Die Anzahl dieser Abbildungen ermitteln wir folgendermaßen: Wir betrachten die $p^k - 1$ Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ aus V_p und setzen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a} = w\,\mathfrak{b}$ mit $w \in \Pi$ gilt. Man sieht leicht, daß die Beziehung $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, also eine Einteilung der $p^k - 1$ Vektoren in zueinander fremde Klassen zur Folge hat, und daß jede dieser Klassen genau $p-1$ Elemente enthält, so daß genau $\varkappa$ Klassen vorhanden sind.

Es mögen nun die Vektoren $\mathfrak{a}_\nu (\nu = 1, 2 \ldots \varkappa)$ ein genaues Vertretersystem für die $\varkappa$ Klassen bilden. Dann läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ aus V_p eindeutig darstellen in der Form $\mathfrak{a} = w\,\mathfrak{a}_\nu$. Wir bilden eindeutige Abbildungen ψ von V_p auf Π nach folgender Vorschrift:

$$\psi \mid \mathfrak{o} = 0 \qquad \psi \mid w\,\mathfrak{a}_\nu = w \cdot \psi \mid \mathfrak{a}_\nu = w\,a_\nu \tag{14}$$

Jede dieser Abbildungen hat die Eigenschaft (9) und jede eindeutige Abbildung von V_p auf Π mit der Eigenschaft (9) ist unter den durch (14) gegebenen Abbildungen enthalten. Dann und nur dann sind zwei Abbildungen (14) identisch, wenn sie in allen a_ν übereinstimmen. Da wir nun für jedes der a_ν genau p Möglichkeiten haben, erhalten wir als

Gesamtzahl der Abbildungen (14) und damit als Wert von $o(\mathfrak{N})$ den Ausdruck $p^{\varkappa}$.

Der damit vollständig bewiesene Hilfssatz 5 ermöglicht uns den Beweis von folgendem

Satz V: Wenn n quadratfrei ist, sind die Gruppen $\mathfrak{V}_n^k$ und $\mathfrak{E}_n^k$ identisch.

Beweis: Wir erinnern uns an die Definition von $\mathfrak{V}_n^k$ und an Satz IV. Daraus erkennen wir, daß Satz V für beliebiges quadratfreies n richtig ist, wenn er für den Fall stimmt, daß $n=p$ eine Primzahl ist. Um den Beweis für diesen Fall zu führen, erinnern wir daran, daß jedenfalls gilt

$$\mathfrak{E}_p^k \subseteq \mathfrak{V}_p^k$$

Ist umgekehrt ein Element E von $\mathfrak{V}_p^k$ gegeben, so betrachten wir die diesem Element zugeordnete eineindeutige Abbildung η von V_p auf sich; nach Definition von $\mathfrak{V}_p^k$ erfüllt diese Abbildung die Beziehung (6). Wir können diese Abbildung η nun zusammengesetzt denken aus k eindeutigen Abbildungen von V_p auf Π, von denen jede eine Komponente des Bildvektors liefert, und jede dieser Abbildungen hat die Eigenschaft (9). Jede dieser Abbildungen läßt sich durch die Polynome einer Restklasse von $I[\mathfrak{x}] \mid A^{\mu}$ erzeugen, die zu $\mathfrak{N}$ gehört, und da wegen der Eineindeutigkeit von η keine dieser Abbildungen jedes Element von V_p auf 0 abbilden kann, läßt sich nach Hilfssatz 5 jede dieser Abbildungen durch eine nichtkonstante Form $f(\mathfrak{x})$ mit $[f] \equiv 1 \bmod p-1$ erzeugen. Wir erhalten also einen Vertretervektor $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ für E, dessen sämtliche Komponenten solche Formen sind, und nach Hilfssatz 4 gibt es also auch einen Formenvektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ mit $[\mathfrak{f}] \equiv 1 \bmod p-1$ in E, also gehört E zu $\mathfrak{E}_p^k$ und es gilt auch

$$\mathfrak{V}_p^k \subseteq \mathfrak{E}_p^k$$

§ 6. Wir müssen nun also noch die Struktur von $\mathfrak{V}_p^k$ ermitteln. Da man, wie aus Hilfssatz 8 von [1] hervorgeht, jede eindeutige Abbildung von V_p auf sich durch einen Polynomvektor $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ erzeugen kann, gilt in diesem Falle die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{V}}_p^k = \mathfrak{U}_p^k$$

daher ist $\mathfrak{V}_p^k$ isomorph zu $\mathfrak{U}_p^k$, der Gruppe aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen von V_p auf sich, welche (6) erfüllen.

Wir wählen nun wieder ein genaues Vertretersystem $\mathfrak{a}_\nu$ für die $\varkappa$ Klassen, in welche die Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ aus V_p zerfallen. Ist nun $\vartheta \in \mathfrak{U}_p^k$, so gilt

$$\vartheta \mid \mathfrak{a}_\nu = \lambda_\nu \, \mathfrak{a}_{\beta/\nu} \qquad \lambda_\nu \in \Pi \qquad \nu = 1, 2 \ldots \varkappa \qquad (15)$$

Wegen $\vartheta \mid \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ ist dabei stets $\lambda_\nu \neq 0$ und β ist eine Permutation der $\varkappa$ Indizes ν, denn würde der Index μ unter den $\beta \mid \nu$ nicht vorkommen, so würde $\mathfrak{a}_\mu$ nicht als Bild auftreten — dies folgt leicht aus dem Erfülltsein von (6) — und ϑ wäre nicht eineindeutig. Auf diese Art wird also jedem Element von $\mathfrak{U}_p^k$ eindeutig eine monomiale Substitution (15) zugeordnet. Ist umgekehrt eine derartige Substitution gegeben, so ergänze man sie mittels

$$\vartheta \mid w\, \mathfrak{a}_\nu = w \,.\, \vartheta \mid \mathfrak{a}_\nu$$

zu einer eindeutigen Abbildung von V_p auf sich; diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig, denn $\vartheta \mid \mathfrak{a}_\nu$ durchläuft ja nach Konstruktion der Substitution (15) alle $\varkappa$ Klassen; sie gehört zu $\mathfrak{U}_p^k$ — es ist ja

$$\vartheta \mid r\, \mathfrak{a} = \vartheta \mid r\, w\, \mathfrak{a}_\nu = r\, w \,.\, \vartheta \mid \mathfrak{a}_\nu = r \,.\, \vartheta \mid \mathfrak{a}$$

— und es ist ihr tatsächlich die gegebene Substitution (15) zugeordnet. Da schließlich verschiedenen Elementen von $\mathfrak{U}_p^k$ verschiedene Substitutionen (15) entsprechen, ist diese Zuordnung umkehrbar eindeutig.

Ist nun dem $\eta \in \mathfrak{U}_p^k$ die monomiale Substitution

$$\eta \mid \mathfrak{a}_\nu = \mu_\nu\, \mathfrak{a}_{\gamma/\nu}$$

zugeordnet, so gilt

$$\eta\, \vartheta \mid \mathfrak{a}_\nu = \eta \mid \lambda_\nu\, \mathfrak{a}_{\beta/\nu} = \lambda_\nu\, \eta \mid \mathfrak{a}_{\beta/\nu} = \lambda_\nu\, \mu_{\beta/\nu}\, \mathfrak{a}_{\gamma\beta/\nu}$$

Daraus folgt, daß die Zuordnung ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{U}_p^k$ und der monomialen Gruppe ist, die von allen Substitutionen (15) gebildet wird, also jener Gruppe, die man erhält, wenn man in den regulären Darstellungsmatrizen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_\varkappa$ die Einsen auf jede mögliche Art durch von 0 verschiedene Elemente $\lambda \in \Pi$ ersetzt, das heißt, durch Elemente der zyklischen Gruppe Z_{p-1} der Ordnung $p - 1$. Wir bezeichnen diese Gruppe nach *Ore* als Symmetrie $\Sigma_\varkappa(Z_{p-1})$ und haben somit nach Satz V folgenden

Satz VI: Ist p eine Primzahl, so ist die Gruppe $\mathfrak{E}_p^k$ isomorph zur Symmetrie $\Sigma_\varkappa(Z_{p-1})$, wobei Z_{p-1} die zyklische Gruppe der Ordnung $p - 1$ ist und $\varkappa = \dfrac{p^k - 1}{p - 1}$.

Zum Schluß behandeln wir folgende Frage: Wir bezeichnen so wie in Satz II mit $\mathfrak{K}_n^k$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{G}_n^k$ mit einem Formenvektor $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ vom Grad 1 als Vertreter. Ist n quadratfrei, dann gilt $\mathfrak{K}_n^k \subseteq \mathfrak{E}_n^k$ und wir wollen feststellen, wann die Beziehung

$$\mathfrak{K}_n^k = \mathfrak{E}_n^k \tag{16}$$

gilt. Dazu verwenden wir folgende Aussagen über $\mathfrak{K}_n^k$:

a) Ist $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, so gilt $\mathfrak{K}_n^k \sim \mathfrak{K}_a^k \times \mathfrak{K}_b^k$.

b) Ist $n = p$ eine Primzahl, so ist die Ordnung von $\mathfrak{K}_n^k$ gegeben durch

$$o(\mathfrak{K}_p^k) = (p^k - 1)(p^k - p) \ldots (p^k - p^{k-1}) \tag{17}$$

Der Beweis der ersten Aussage ist nach den Methoden von § 4 sehr leicht zu führen, so daß wir uns ihn hier schenken können; die zweite Aussage ist z. B. eine leichte Folgerung von Hilfssatz 3 aus [1].

Aus a) in Verbindung mit Satz IV folgt nun, daß die Beziehung (16) für zusammengesetztes n dann und nur dann gilt, wenn sie für jeden Primfaktor von n gilt. Um nun festzustellen, wann (16) für Primzahlen gilt, brauchen wir bloß die durch Satz VI festgelegte Ordnung von $\mathfrak{E}_p^k$ mit der von $\mathfrak{K}_p^k$ zu vergleichen:

$$o(\mathfrak{E}_p^k) = \varkappa!(p-1)^\varkappa = \prod_{\nu=0}^{\varkappa-1} [\varkappa(p-1) - \nu(p-1)] = \prod_{\nu=0}^{\varkappa-1} [p^k - \nu(p-1) - 1]$$

Dieser letzte Ausdruck enthält alle Faktoren von (17); man kann ja ν stets so bestimmen, daß ein beliebiger dieser Faktoren herauskommt. Ist nun aber $k > 2$, so beginnt dieser Ausdruck folgendermaßen:

$$(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - 2p + 1) \ldots \tag{18}$$

und wegen $2p - 1 < p^2$ kann (16) nicht eintreten. Für $k = 2$ ist der dritte Faktor in (18) größer als 1, außer wenn $p = 2$ ist, daher kann (16) höchstens in diesem Falle eintreten und tritt auch tatsächlich ein, ebenso für $k = 1$ und beliebiges p, so daß wir haben:

$\mathfrak{E}_n^k = \mathfrak{K}_n^k$ *gilt für* $k = 1$ *und alle quadratfreien* n *sowie für* $k = 2$, $n = 2$, *aber in keinem weiteren Fall.*

Literatur.

1. *W. Nöbauer*: Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten. Monatsh. Math. **59**, 118—145 (1955).

2. *W. Nöbauer*: Über eine Gruppe der Zahlentheorie. Monatsh. Math. **58**, 181—192 (1954).

Über die Anzahl der Lösungen von $[p-1, q-1] \leq x$.

(Aus einem Brief von **P. Erdös** an **K. Prachar**)[1]

(Eingelangt am 18. Mai 1955.)

... Wir wollen die Anzahl N der Lösungen von

$$[p-1, q-1] \leq x \tag{1}$$

abschätzen, wobei p, q Primzahlen bedeuten und mit $[a, b]$ allgemein das kleinste gem. Vielfache der natürlichen Zahlen a und b bezeichnet wird. N_d bedeute die Anzahl der Lösungen von

$$[p-1,\ q-1] \leq x,\ \ (p-1,\ q-1) = d. \tag{2}$$

Aus (2) folgt offenbar $p \equiv q \equiv 1 \pmod{d}$, $(p-1)(q-1) \leq d\,x$. Wenn die Anzahl der Lösungen von

$$p \equiv q \equiv 1 \pmod{d},\ \ (p-1)(q-1) \leq d\,x$$

mit N_d' bezeichnet wird, so gilt also $N_d \leq N_d'$. Also

$$N \leq \sum_{d=2}^{x} N_d'.$$

Es ist klar, daß

$$N_d' \underset{p \equiv 1 \pmod{d},\ p < (2dx)^{1/2}}{\leq} 2 \sum \pi\left(1, d, \frac{2\,dx}{p}\right)$$

wobei $\pi(1, d, y)$ die Anzahl der Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{d}$, $p \leq y$ ist. Mit Hilfe der *Brun*'schen Siebmethode folgt[2]

$$\pi\left(1,\ d,\ \frac{2\,dx}{p}\right) < \frac{c_1\,d\,x}{p\,\varphi(d)}\ (\log \frac{x}{p})^{-1} < \frac{c_1\,d\,x}{p\,\varphi(d)}\ \{\log (\frac{x}{2\,d})^{1/2}\}^{-1}. \tag{3}$$

---

[1] Dies ist ein Teil eines Briefes von *P. Erdös* vom 9. Nov. 1954, dessen Veröffentlichung uns der Autor freundlicherweise gestattet hat. Zu dem hier bewiesenen Resultat vergleiche man die Arbeit von *K. Prachar*, diese Monatshefte **59** (1955), 91 (Anm. d. Red.).

[2] Siehe dazu *V. Brun*, Über das Goldbach'sche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Math. og Naturvideskab, 34 (1915), No. 8 und *E. C. Titchmarsh*, A divisor problem, Rendiconti Palermo 54 (1930) 414. Mit c werden wie üblich positive Konstanten bezeichnet.

Es sei zunächst $d < x^{1/4}$. Dann folgt aus (3)

$$\pi(1, d, \frac{2\,d\,x}{p}) < \frac{c_2\,dx}{p\,\varphi(d)\log x} \tag{4}$$

Mittels der Methode von *Brun* folgt weiter

$$\sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod d \\ p < (2xd)^{1/2},\ d < x^{1/4}}} \frac{1}{p} < c_3 \frac{\operatorname{loglog} x}{\varphi(d)}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$N_d' < \frac{c_4\,d\,x \operatorname{loglog} x}{(\varphi(d))^2 \log x} < c_5 \frac{x(\operatorname{loglog} x)^3}{d \log x} \tag{6}$$

wegen $d/\varphi(d) < c \operatorname{loglog} x$. Also gilt

$$\sum_{d < x^{1/4}} N_d' < c_6\, x(\operatorname{loglog} x)^3. \tag{7}$$

Anstatt (7) kann man durch etwas längere Rechnung auch $\sum_{d<x^{1/4}} N_d' < c_6\, x \operatorname{loglog} x$ erhalten, da bekanntlich $\sum_{d<y} d/\varphi(d)^2 < c \log y$ gilt.

Sei nun $x^{1/4} \leq d \leq x$, $p-1 = a\,d$, $q-1 = b\,d$, $a\,b \leq x/d$, $(a, b) = 1$, $a\,b \leq x^{3/4}$. Für festes a und b ist die Anzahl der Primzahlen p, q mit $p-1 = ad$, $q-1 = bd$, $d \leq x/ab$ $(ab \leq x^{3/4})$ höchstens

$$c_7 \frac{x}{a\,b(\log x)^2} \prod_{p \mid ab\,(a-b)} (1 + \frac{1}{p}).$$

Dies folgt durch Anwendung der *Brun*'schen Siebmethode. Nun ist

$$\sum_{1 \leq a,\, b \leq x} (a\,b)^{-1} \prod_{p \mid ab\,(a-b)} (1 + \frac{1}{p}) < c_8 (\log x)^2.$$

Also ist die Anzahl der p, q mit $[p-1,\ q-1] \leq x$, $x^{1/4} \leq d \leq x$ kleiner als $c_9\, x$. Daher ist die Anzahl der Lösungen von $[p-1, q-1] \leq x$ kleiner als $c_{10}\, x(\operatorname{loglog} x)^3$ und dies läßt sich auf $c_{10}\, x \operatorname{loglog} x$ verschärfen.[3]

[3] Zusatz bei der Korrektur: Durch noch etwas genauere Abschätzung läßt sich dies auf $c_{10}\, x$ verbessern. Man kann nämlich die im Falle $d < x^{1/4}$ entstehende Summe

$$S = \sum_{p \leq x} \frac{A_p}{p}, \quad A_p = \sum_{d \mid p-1} \frac{d}{\varphi(d)}$$

abschätzen, indem man zuerst $\sum_{p \leq x} A_p = 0(x)$ zeigt (nach dem Vorbild von *Titchmarsh*, loc. cit.) und dann durch partielle Summation $S = 0(\log x)$ findet. (Mitteilung von *P. Erdös* vom 7. September 1955).

An Extremal Theorem for N-Simplexes.

By

C. M. Petty and **D. Waterman.**

(Received on May 21st, 1955.)

1. Introduction. Comparing the sum $R_0 + R_1 + R_2$ of the distances from the vertices of a triangle to an arbitrary point P with the area Δ of the triangle, *L. Fejes Tóth* has given the relation

$$R_0 + R_1 + R_2 \geq 2 \cdot 3^{1/4} \Delta^{1/2}$$

where equality holds if and only if the triangle is equilateral and P is its centroid.[1]

Here we generalize this result to n-dimensions; the method of proof is not a generalization of that of *Fejes Tóth*.

Theorem: *If* R_i $(i=0, \ldots, n)$ *are the distances from an arbitrary point* P *to the vertices of a non-degenerate simplex in* E^n *of volume* Δ, *then*

$$R_0 + \ldots + R_n \geq (n+1)^{\frac{n-1}{2n}} n^{1/2} (n!)^{\frac{1}{n}} \Delta^{\frac{1}{n}}$$

where the equality holds if and only if the simplex is regular and P *is its centroid.*

2. A characterization of a regular simplex. If the altitudes of a simplex are concurrent, the simplex is said to be orthocentric, and their intersection point P is called the orthocenter. Let $u_0, \ldots, u_n$ be the unit vectors from P extending toward the vertices.

An orthocentric n*-simplex is regular if and only if*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = 0.$$

Proof: We take the orthocenter P as origin and coordinatize the vertices P_i in the following manner:

---

[1] *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. (Berlin, 1953), 11—12.

$$
\begin{aligned}
P_0 &: (0, \ldots 0, x_n^0) \\
P_1 &: (0, \ldots 0, x_{n-1}^1, x_n^1) \\
&\cdots \\
P_{n-2} &: (0, x_2^{n-2}, \ldots, x_2^{n-2}) \\
P_{n-1} &: (x_1^{n-1}, \ldots, x_n^{n-1}) \\
P_n &: (x_1^n, \ldots, x_n^n)
\end{aligned}
$$

where $x_n^0 > 0$. Let the vector from P to P_i be denoted v_i and its length by r_i. Since v_i is normal to the face of the simplex opposite to P_i, we have

$$v_i \cdot v_j = \text{constant}, \ (i \neq j). \tag{2.1}$$

Consequently $x_m^i = x_m^j$ for $i, j > n - m$.

Since $u_1 + \ldots + u_n = 0$ we have

$$\frac{x_1^{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{x_1^n}{r_n} = 0;$$

hence $x_1^{n-1} = -x_1^n$, and $r_{n-1} = r_n$. It follows that $x_n^0 = r_0 = \ldots = r_n = R$. By (2.1)

$$v_i \cdot v_j = x_n^0 x_n^1 = R^2(-1/n) = R^2 \cos \Theta$$

where Θ is the angle between any two vectors v_i. By the law of cosines it follows that the simplex is regular and

$$D^2 = 2R^2(1 + 1/n) \tag{2.2}$$

where D is the edge length.

3. Proof of the theorem. We establish the existence of an extremal simplex. For a given n-simplex S with volume $\Delta > 0$ there is a unique point P for which $R_0 + \ldots + R_n = \delta_S$ is minimal. Let $\delta = \text{g. l. } b\ \delta_S$ for all n-simplexes S with volume Δ, and let S_i be a sequence of simplexes with the origin as a common interior point such that $\delta_{S_i} \to \delta$. The S_i are uniformly bounded and by the *Blaschke* selection theorem[2] there exists a subsequence converging to a simplex S^* of volume Δ which, by continuity, must be an extremal simplex.

It is easily demonstrated, by an induction argument, that the minimal point P for an extremal simplex must be an interior point.

Since moving a vertex P_i parallel to its opposite face does not alter the volume of the simplex, it follows that an extremal simplex is orthocentric with P as orthocenter.

---

[2] *Bonnesen* and *Fenchel*, Theorie der Konvexen Körper (Berlin, 1934), 34.

The locus H of points containing P such that the sum of the distances to n vertices $(P_1, \ldots, P_n)$ of the extremal simplex is constant is an analytic convex surface symmetric to the hyperplane containing $P_1, \ldots, P_n$. If we write the condition that a point on H maximizes the distance to a hyperplane we have at once that the sum of the unit vectors from any point of H extending toward each of the points $P_1, \ldots, P_n$ is normal to the tangent hyperplane at this point. At the particular point P the vector from P to P_0 must be normal to the tangent hyperplane of H at P. Thus the sum of the unit vectors originating at P and extending toward each of the $(n+1)$ vertices is normal to each face and hence the sum is zero. The proof that the extremal simplex is regular is completed by reference to the characterization obtained in section 2.

The volume Δ of a regular n-simplex with edge D is computed inductively to be

$$\Delta = \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}\,D^n.$$

By (2.2) we have then

$$\Delta = \frac{1}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}R^n$$

and the proof of the theorem is complete.

The following formulation is of interest.

Let x_i^j $(i=1, \ldots, n;\ j=0, \ldots, n)$ and p_i $(i=1, \ldots, n)$ be any set of $n(n+2)$ real numbers. Then

$$\sum_{j=0}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^j - p_i)^2} \geq (n+1)^{\frac{n-1}{2n}}\,n^{\frac{1}{2}}\left|\begin{vmatrix} x_1^0 & \ldots & x_n^0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & \ldots & x_n^n & 1 \end{vmatrix}\right|^{\frac{1}{n}}$$

where equality holds if and only if

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^m - x_i^j)^2 = \text{constant},\quad j \neq m,$$

and

$$p_i = \frac{x_i^0 + \ldots + x_i^n}{n+1},\quad (i=1, \ldots, n).$$

On Orthogonal Polynomials with Extrema at the Ends of the Orthogonality Interval.

F. V. Atkinson, Canberra, Australia.

(Received March 31st, 1955.)

1. Introduction.

I consider here a family of polynomials which are orthogonal with respect to a constant weight-function over a finite interval, and which satisfy two supplementary conditions; these conditions are that the derivatives of the polynomials should vanish at the ends of the interval of orthogonality. Taking this interval to be (—1, 1), these polynomials may be defined as the result of applying the orthogonalisation process to the functions 1, $x^3/3 - x$, $x^4/4 - x^2/2$, ...

This topic forms a special case of two extensions of the theory of orthogonal polynomials, and enjoys the special properties of both these extensions. There is first the theory of orthogonal polynomials subject to boundary conditions, the weight-function having one of the classical forms; here *W. Gröbner*[1] has shown how to obtain explicit expressions for the polynomials. Secondly there is the theory of orthogonal polynomials, with general weight-function, whose derivatives are to vanish at certain specified points[2]. These points may be real, or may occur in complex conjugate pairs, but should not fall within the orthogonality interval, if the polynomials are to bear a close resemblance to ordinary orthogonal polynomials. The case in which the points include one or both ends of the orthogonality interval is of special interest as a borderline case, and exhibits certain peculiarities.

I study here two asymptotic problems, using the possibility of an explicit representation in terms of *Legendre* polynomials, for which

---

[1] Monatshefte für Math. 52, 38—54 (1943), where an earlier reference is given.

[2] I have given some developments along these lines in Revista Mat. y Fis. Teor. 10, 95—110 (1954).

asymptotic information is available. The first problem is that of the asymptotic value of the polynomials. Denoting the polynomials in order of degree by $q_0(x)$, $q_1(x)$, ... it turns out that $q_n(x)$ is asymptotic in a restricted sense to a multiple of $P_{n+2}(x)$, diverging from it near the points $x = \pm 1$; results of this kind have an obvious application to the proof of equi-convergence theorems. The second problem considered is that of the asymptotic location of the „exterior zeros", which have no analogue in the theory of ordinary orthogonal polynomials. Since $q_n(x)$ is, for $n \geq 1$, of degree $n + 2$ it will have two zeros in addition to the n zeros in the interior of the orthogonality interval. The two extra zeros lie in fact outside the orthogonality interval, and for this reason I term them exterior zeros.

2. Evaluation of the polynomials.

The polynomials $q_n(x)$ will be uniquely fixed by the following requirements:

(i) $q_0(x)$ is a positive constant,

(ii) $q_n(x)$ is for $n \geq 1$ a polynomial of degree $n + 2$, in which the coefficient of x^{n+2} is positive,

(iii) there hold the orthonormality conditions

$$\int_{-1}^{1} q_m(x)\, q_n(x)\, dx = \delta_n^m, \quad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

(iv) $q_n'(1) = q_n'(-1) = 0$ for all n.

We could alternatively fix the $q_n(x)$ by means of a least mean square property, as for ordinary orthogonal polynomials, together with the supplementary conditions (iv). This might make it possible to use the variational method of *Gröbner* to evaluate the polynomials. We shall however use a method of trial substitution, using a form suggested by *Gröbner*'s results, and utilising the symmetry of the problem.

We put in fact, for $n \geq 1$,

$$q_n(x) = (d/dx)^{n+2} f(x) \tag{2.1}$$

where

$$f(x) = a(x^2 - 1)^{n+2} + b(x^2 - 1)^{n+1} + c(x^2 - 1)^n, \tag{2.2}$$

and a, b and c are to be determined. This is equivalent tho the substitution

$$q_n(x) = uP_{n+2}(x) + vP_{n+1}'(x) + wP_n''(x) \tag{2.3}$$

where u, v and w are other numerical coefficients.

So far as the orthogonality is concerned, we have to ensure that $q_n(x)$ is orthogonal to any polynomial $g(x)$ of degree less than $n+2$ and such that $g'(1) = g'(-1) = 0$. Using superscripts to denote repeated differentiations we have, by repeated partial integration,

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)\, g(x)\, dx = [f^{(n+1)}\, g]_{-1}^{1} - [f^{(n)}\, g']_{-1}^{1} + \ldots + (-1)^{n+1}\, [fg^{(n+1)}]_{-1}^{1}.$$

Here the form (2.2) for $f(x)$ ensures that all the terms on the right vanish, except possibly the first term. We therefore impose the condition that $f^{(n+1)}(x) = 0$ for $x = \pm 1$. In terms of (2.3) this implies that

$$vP_{n+1}(x) + wP_n'(x) = 0 \text{ for } x = \pm 1, \tag{2.4}$$

and it is sufficient to require this for $x = 1$ only.

We have next to ensure that $q_n(x)$ satisfies (iv). In terms of (2.3) this means that

$$uP_{n+2}'(x) + vP_{n+1}''(x) + wP_n'''(x) = 0 \text{ for } x = \pm 1, \tag{2.5}$$

and again it is sufficient to require this for $x = 1$ only.

We have now determined $q_n(x)$ except for a constant factor. In view of (2.3—5) we may put

$$q_n(x) = \lambda_n \begin{vmatrix} P_{n+2}(x) & P_{n+1}'(x) & P_n''(x) \\ P_{n+2}'(1) & P_{n+1}''(1) & P_n'''(1) \\ 0 & P_{n+1}(1) & P_n'(1) \end{vmatrix}$$

where the magnitude of λ_n is to be fixed by normalisation and its sign by making $P_{n+2}(x)$ have positive coefficient. We now use the results

$P_n(1) = 1$, $P_n'(1) = {}^1/_2 n(n+1)$, $P_n''(1) = {}^1/_8 (n-1)\, n(n+1)\, (n+2)$,

$P_n'''(1) = (1/48)\, (n-2)\, (n-1)\, n(n+1)\, (n+2)\, (n+3)$.

If we insert these values and evaluate the determinant we may write the result as

$$q_n(x) = \mu_n \left\{ P_{n+2}(x) - \frac{6P_{n+1}'(x)}{n^2+3n-1} + \frac{12P_n''(x)}{n(n+1)\,(n^2+3n-1)} \right\}, \tag{2.6}$$

where μ_n is a positive constant to be fixed by normalisation.

In carrying out the normalisation we note that $P_{n+2}(x)$ is orthogonal to $P_{n+1}'(x)$ and to $P_n''(x)$, and further that

$$\int_{-1}^{1} P_{n+2}^2\, dx = 2/(2n+5), \quad \int_{-1}^{1} P_{n+1}'^2\, dx = (n+1)\, (n+2),$$

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1} P''_n \, dx = {}^1/_4(n-1)\, n(n+1)\,(n+2),$$

$$\int_{-1}^{1} P''^2_n \, dx = (1/12)\,(n-1)\, n(n+1)\,(n+2)\,(n^2+n+3), \tag{2.7}$$

If therefore we square (2.6) and integrate over $(-1, 1)$ we have, using the normalisation,

$$1 = \mu_n^2 \{2/(2n+5) + O(n^{-2})\},$$

and (2.6) may be put in the form

$$q_n(x) = \sqrt{\frac{2n+5}{2}}\, P_{n+2}(x) + \sigma_n P'_{n+1}(x) + \tau_n P''_n(x), \tag{2.8}$$

where σ_n, τ_n are constants such that

$$\sigma_n = O(n^{-3/2}),\ \tau_n = O(n^{-7/2}) \tag{2.9}$$

as $n \to \infty$.

3. Asymptotic behaviour of the polynomials.

It is plain that the asymptotic behaviour of the $q_n(x)$ as $n \to \infty$ can be derived from corresponding results for the Legendre polynomials. We have

Theorem 1. (I) *As $n \to \infty$, $q_n(x)$ tends in mean square over $(-1, 1)$ to the normalised Legendre polynomial*

$$\sqrt{\frac{2n+5}{2}}\, P_{n+2}(x)$$

We have in fact

$$\int_{-1}^{1} \{q_n(x) - \sqrt{\frac{2n+5}{2}}\, P_{n+2}(x)\}^2 \, dx = O(n^{-1}). \tag{3.1}$$

(II) *As $n \to \infty$, $q_n(x)$ tends to $\sqrt{\frac{2n+5}{2}}\, P_{n+2}(x)$ uniformly in an interval of the form $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, for any fixed positive ε.*

(III) *Let A be a fixed positive constant. Then*

$$q_n(\cos\Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\Theta}} \cos\{(n+{}^5/_2)\,\Theta - \frac{\pi}{4}\} + O\{n^{-1}(\sin\Theta)^{-3/2}\}, \tag{3.2}$$

provided that $\sin\Theta > An^{-1}$.

Regarding the proof of (3.1), we have from (2.8), together with (2.7) and (2.9),

$$\int_{-1}^{1}\{q_n(x)-\sqrt{\frac{2n+5}{2}}\,P_{n+2}(x)\}^2dx=O(\sigma_n^2 n^2+|\sigma_n\tau_n|\,n^4+\tau_n^2 n^6)=O(n^{-1}),$$

as required.

Regarding the proof of (II), we have the results, valid for $-1<x<1$,

$$P_n'(x)=O\{n^{1/2}(1-x^2)^{-3/4}\},\ P_n''(x)=O\{n^{3/2}(1-x^2)^{-5/4}\}, \tag{3.3}$$

so that

$$q_n(x)=\sqrt{\frac{2n+5}{2}}\,P_{n+2}(x)+O\{n^{-1}(1-x^2)^{-3/4}\}+O\{n^{-2}(1-x^2)^{-5/4}\}, \tag{3.4}$$

which gives the required result.

We deduce the proof of (3.3) from the Laplace formula, valid for $\sin\Theta>An^{-1}$, with constant $A>0$,

$$P_{n+2}(\cos\Theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi(n+2)\sin\Theta}}\cos\{(n+5/2)\,\Theta-\frac{\pi}{4}\}+O\{(n\sin\Theta)^{-3/2}\};$$

this form of the error term may be derived from Stieltjes' extension of Laplace's formula[3]. We have also, by (3.3),

$$P_n(\cos\Theta)=O\{n^{1/2}(\sin\Theta)^{-3/2}\},$$

and

$$P_n''(\cos\Theta)=O\{n^{3/2}(\sin\Theta)^{-5/2}\}=O\{n^{1/2}(\sin\Theta)^{-3/2}\}$$

for $\sin\Theta>An^{-1}$. Using these estimations in (2.8) we derive (3.2).

4. The location of the exterior zeros.

As noted above, we may divide the zeros of $q_n(x)$, for $n\geq 1$, into two classes, the interior and the exterior zeros. The interior zeros lie in the orthogonality interval, and are n in number, as in the ordinary case, and have many of the properties of the ordinary case[4]. The only information needed here concerning these interior zeros is that they are precisely n in number. The proof of this fact is very similar to the proof of the corresponding result for ordinary orthogonal polynomials[5]. If $q_n(x)$ had

[3] See *G. Szegö*, „Orthogonal Polynomials" (New York, 1939), pp. 188—189.
[4] See my paper cited above.
[5] See *G. Szegö*, „Orthogonal Polynomials" (New York, 1939), p. 43.

fewer than n zeros in the interior of (—1, 1), then we construct a polynomial which had the same sign as $q_n(x)$ in (—1, 1), whose derivative vanished at $x = \pm 1$, and of lower degree than $q_n(x)$. Such a polynomial would then be orthogonal to $q_n(x)$, giving a contradiction. It is then established that $q_n(x)$ has n zeros in the interior of (—1, 1), and since its derivative vanishes at $x = \pm 1$, it is easy to deduce that $q_n(x)$ has one zero in each of the intervals $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Since $q_n(x)$ is either an odd or an even polynomial, it is sufficient to investigate the positive exterior zero.

In the general theory of orthogonal polynomials whose derivatives are required to vanish at specified points outside the orthogonality interval, elementary arguments show that to each such point there tends, as $n \to \infty$, one of the exterior zeros of the polynomials, and furthermore that the distance, between such a point and the corresponding exterior zero, is of order of magnitude precisely n^{-1}. The present case, in which the derivatives are to vanish at the ends of the orthogonality interval, may be regarded as singular; we show that, for the case of a constant weight-function, the distance in question is of order n^{-2}.

Theorem 2. *Let y_n be the positive exterior zero of $q_n(x)$, that is to say the unique zero of $q_n(x)$ in $(1, \infty)$. Then as $n \to \infty$ the quantity $n^2(y_n - 1)$ tends to a limit ζ. The number ζ is the positive value of η for which*

$$F(\eta) = (1 - 6\frac{d}{d\eta} + 12\frac{d^2}{d\eta^2}) I_0(\sqrt{2\eta}) \tag{4.1}$$

changes sign. Here I_0 denotes the Bessel function

$$I_0(z) = \sum_0^\infty (1/2\, z)^{2r} (r!)^{-2} \tag{4.2}$$

We need an approximate formula for $P_n(x)$, where x is so close to 1 as to lie, so to speak, in the *Bessel* zone, where the approximate formula is of the type discovered by *Hilb*[6]. The necessary formula is readily found directly.

We have the result that for fixed positive B and $|\xi| < B$,

$$P_n(1 + \xi(n + 1/2)^{-2}) = I_0(\sqrt{2\xi}) + O(\xi n^{-2}). \tag{4.3}$$

To verify this we use the expansion for $P_n(x)$ in powers of $(x - 1)$ as a hypergeometric series[7]. This gives

[6] *Szegö*, loc. cit. p. 189.

[7] See for example *Whittaker* and *Watson*, „Modern Analysis" (Cambridge, 1935), p. 312.

$$P_n(1+\xi(n+{}^1/_2)^{-2}) = \sum_{r=0}^{\infty} \{{}^1/_2\xi(n+{}^1/_2)^{-2}\}^r (r!)^{-2}(n-r+1)(n-r+2)\ldots(n+r)$$

$$= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} ({}^1/_2\xi)^r (r!)^{-2} \left(1-\frac{1^2}{(2n+1)^2}\right)\left(1-\frac{3^2}{(2n+1)^2}\right)\ldots\left(1-\frac{(2r-1)^2}{(2n+1)^2}\right)$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} ({}^1/_2\xi)^r (r!)^{-2} \{1 + O(r^3 n^{-2})\},$$

from which (4.3) follows immediately, for bounded ξ. In a similar way we have the differentiated formulae

$$P_n'(1 + \xi(n + {}^1/_2)^{-2}) = (n + {}^1/_2)^2 \frac{d}{d\xi} I_0(\sqrt{2\xi}) + O(1), \tag{4.4}$$

$$P_n''(1 + \xi(n + {}^1/_2)^{-2}) = (n + {}^1/_2)^4 \frac{d^2}{d\xi^2} I_0(\sqrt{2\xi}) + O(n^2), \tag{4.5}$$

also valid for $|\xi| < B$ and any fixed B.

Applying these results to the evaluation of $q_n(x)$, where $x = 1 + \eta n^{-2}$ and η is bounded, we have

$$P_{n+2}(1+\eta n^{-2}) = I_0(\sqrt{2\eta}\ \frac{n+5/2}{n}) + O(\eta n^{-2}) = I_0(\sqrt{2\eta}) + O(\eta n^{-1}),$$

and similarly

$$P_{n+1}'(1 + \eta n^{-2}) = n^2 \frac{d}{d\eta} I_0(\sqrt{2\eta}) + O(n),$$

$$P_n''(1 + \eta n^{-2}) = n^4 \frac{d^2}{d\eta^2} I_0(\sqrt{2\eta}) + O(n^3).$$

Inserting these in (2.6) we have

$$q_n(1 + \eta n^{-2}) = \mu_n \{(1 - 6\frac{d}{d\eta} + 12\frac{d^2}{d\eta^2}) I_0(\sqrt{2\eta}) + O(n^{-1})\}$$

$$= \mu_n \{F(\eta) + O(n^{-1})\}, \tag{4.6}$$

for any bounded η.

We complete the proof by showing that $F(\eta)$ changes sign for a unique positive η — value, which we call ζ. We have first that $F(0) = -{}^1/_2$, as may be verified from the power series (4.2). Also $F(\eta) \to +\infty$ as $\eta \to +\infty$, as may be verified from the asymptotic expansion of the *Bessel* functions concerned[8]. Thus $F(\eta)$ must change

[8] *Whittaker* and *Watson*, loc. cit., p. 373.

sign for at least one positive η—value. That there cannot be several such η—values does not seem obvious from the known properties of *Bessel* functions. However if there were several such η—values, then, for sufficiently large n, it would follow from (4.6) that $q_n(x)$ had several zeros in the interval $(1, \infty)$, which conflicts with the general theory of these orthogonal polynomials; the proof that there is only one exterior zero in this interval was indicated above. This completes the proof of Theorem 2.

Buchbesprechungen.

Opere. Von *L. Bianchi*. Vol. III: Sistemi tripli ortogonali. 852 S. Roma: Edizioni Cremonese, 1955, Lire 7.500.

Dieser Band enthält 29 Abhandlungen von *L. Bianchi* über dreifach orthogonale Systeme. Das Buch beginnt mit einem Vorwort von *B. Gambier*, das einen historischen Bericht darstellt und die Bedeutung der Arbeiten von *L. Bianchi* auf diesem Gebiet der Differentialgeometrie ins rechte Licht stellt. Das Buch ist in 5 Kapitel gegliedert, an deren Beginn *B. Gambier* über alle darin enthaltenen Arbeiten referiert.

N. Hofreiter, Wien

The Collected Works of George Abram Miller. Band IV. XI, 458 S. Urbana: University of Illinois Press. 1955 $ 7.50.

Nach einer längeren Pause, in der der Autor starb, erschien nur der vierte Band der gesammelten Werke. Er enthält fast 100 Arbeiten, die größtenteils der Gruppentheorie angehören und die der Autor in den Jahren 1916—1927 veröffentlichte.

N. Hofreiter, Wien

Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung. Von *H. Hasse*. (Schriftenreihe zur Mathematik; Heft 1.) VIII, 103 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle-Verlag, 1955. DM 6.80.

Bedauerlicherweise haben viele, auch hochintelligente Menschen, eine falsche Vorstellung von der Mathematik. Dieses Heft wirkt aufklärend. Es behandelt Themen, deren Probleme leicht verständlich sind. Die Antworten sind teils leicht und werden ausführlich gegeben. Sind die Probleme schwierig zu lösen, so werden die Antworten nur angedeutet. Die Themen sind aus verschiedenen Gebieten der Mathematik entnommen. Probleme über Primzahlen, Aufgaben über Maxima und Minima, Quadratur des Kreises und das Vierfarbenproblem wechseln in bunter Reihenfolge ab. Die Schrift ist aus Vorlesungen des Verfassers über Mathematik im Studium generale entstanden und daher für einen großen Kreis von Lesern bestimmt. Auch Hörer und Lehrer der Mathematik werden aus dem Heft Nutzen ziehen. Bei all diesen Schriften kommt es aber weitgehend auf die Darstellung an. Hier zeigt sich wieder so recht, daß der Autor ein Meister der Darstellung ist. Er versteht es wie nur wenige, so zu schreiben, daß der Leser leicht mitkommt und von dem eigenartigen Reiz der Mathematik gefesselt wird.

N. Hofreiter, Wien

Maß und Zahl im Kunstwerk. Von *Ellen Weber*. (Beihefte für den mathematischen Unterricht: Heft 3.) Mit 58 Textabb., 4 Kunstdrucktafeln, 55 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 2.90.

Viele Schöpfungen und Vorgänge in der Natur sind mit mathematischen Gesetzen erfaßbar. Es gibt aber auch solche, die sich der mathematischen Erfassung entziehen. Das Gleiche gilt auch für die Werke der Kunst. Bei jedem

Kunstwerk ist das harmonische Gefühl des Schaffenden das Primäre. Der schaffende Künstler ist ein begnadeter Mensch, der die Harmonien der Schöpfung in sich trägt. Forscher und Gelehrte haben Kunstwerke auf Maß und Zahl untersucht und dabei so manche Gesetzmäßigkeit aufgefunden. Es steckt eben in jedem Kunstwerk irgendwie die Zahl; das ist leicht erkennbar, wenn eine Symmetrie vorherrscht. Das Büchlein befaßt sich mit solchen Kunstwerken, denen ein mathematisches Gesetz entnommen werden kann. So werden Proportionen und Proportionsreihen an geometrischen Grundformen untersucht, zahlreiche Beispiele für harmonische Maßverhältnisse angeführt und Ergebnisse nachträglicher Messungen an Bauwerken der Antike und des Mittelalters angegeben. Ein eigenes Kapitel befaßt sich mit Ornamenten. Das letzte Kapitel handelt von mathematisch konstruierten Teilformen und von Maßwerken, in denen „Nasen", „Vielpässe" und „Fischblasen" als wesentliche Bestandteile auftreten können.

So versucht dieses Büchlein über die Zahl eine Brücke von der Kunst zur Mathematik zu schlagen und so das Interesse für die Mathematik zu wecken.

J. Laub, Wien

Aus der Welt der Zahlen. Von *R. Schmidt* und *R. Stender*. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts: Heft 7.) 48 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle-Verlag. 1954. DM 3.60.

Das Heft beginnt mit einer historischen Übersicht über die Zahlentheorie im Unterricht. Dann wird gezeigt, was man bringen soll und was gemacht werden kann. Es ist klar, daß man im Unterricht nur wenig Zahlentheorie betreiben kann. Aber auf allen Altersstufen bietet sich Gelegenheit, zahlentheoretische Fragen zu behandeln. Dadurch wird eine vorzügliche Schulung im logischen Denken erreicht. Nach Meinung der Verfasser sollte im Unterricht der Begriff der endlichen abelschen Gruppe gebracht werden; in Arbeitsgruppen könnten Kettenbrüche, Euklidischer Algorithmus, Kongruenzbegriff, Restklassen, periodische Dezimalbrüche und der kleine Fermatsche Satz behandelt werden. Das Heft enthält viele wertvolle Anregungen für den Unterricht. Die Sätze 1 und 3 auf Seite 9 sind fehlerhaft zitiert.

N. Hofreiter, Wien

Transfinite Zahlen. Von *H. Bachmann*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 1.) VII, 204 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 29.80.

Das vorliegende sehr klar geschriebene Buch gibt nicht nur Ergebnisse und den derzeitigen Stand der modernen Theorie der transfiniten Zahlen wieder, sondern trägt gleichzeitig beinahe den Charakter eines Lehrbuches, da fast alle Sätze mit ausführlichen Beweisen versehen sind. Das ist ohne Zweifel sehr erfreulich, da auf diesem Gebiet bisher ein empfindlicher Mangel an modernen Darstellungen bestand. Der Darstellung liegt das Axiomensystem von *Zermelo-Fraenkel* zu Grunde, das nach Bedarf erweitert wird, jedoch wird alles vom Standpunkt der naiven Mengenlehre aus formuliert. Dieser in der einen oder anderen Weise modifizierte Vorgang hat sich auch bei anderen verwandten Darstellungen bewährt. (*Fraenkel*, Abstract Set Theory, *Sierpinski*, Algèbre des ensembles). Von den neueren Ergebnissen aus der Theorie der Ordnungszahlen wollen wir besonders die über Normalfunktionen hervorheben, die vielfach auf den Verf. zurückgehen. Stets ist in der Darstellung das Eingreifen des

Auswahlaxioms hervorgehoben. Ein eigener Abschnitt ist der Arithmetik der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen ohne Auswahlaxiom gewidmet. Dadurch wird besonders deutlich, ein wie mächtiges Instrument dieses Axiom im Rahmen der Mächtigkeitstheorie ist. Die letzten drei Abschnitte über die Konsequenzen des Auswahlaxioms und der Alephhypothese, die Probleme des Kontinuums und die unerreichbaren Zahlen müssen jeden Mathematiker fesseln. Stoßen sie doch an die Grenze des mathematischen Denkens, ja an die Grenze des menschlichen Denkens überhaupt vor. Wir erwähnen noch das ziemlich vollständige Verzeichnis der neueren Literatur.

L. Schmetterer, Wien

Kombinatorik. Von *K. Wellnitz*. Mit 1 Textabb., 50 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 3.20.

Das Büchlein, das als Beiheft für den mathematischen Unterricht bezeichnet wird, führt in klarer und leicht verständlicher Weise die grundlegenden Begriffe der Kombinatorik ein. Jedes der fünf Kapitel (Permutationen verschiedener Elemente, Permutationen von zum Teil gleichen Elementen, Kombinationen ohne Wiederholung, Kombinationen mit Wiederholung, Variationen) beginnt mit Vorübungen, aus denen sich die allgemeinen Sätze vermuten lassen. Daran schließt sich die Durchführung, die den Beweis für die Vermutung bringt. Das Ergebnis wird als Lehrsatz besonders herausgestellt. Gut ausgewählte und ausführlich erläuterte Beispiele und eine Sammlung von Übungsaufgaben beschließen jedes Kapitel.

Das Büchlein, das 52 ausführlich behandelte Beispiele und 90 Übungsaufgaben enthält, kann zum Gebrauch an unseren Mittelschulen wärmstens empfohlen werden.

J. Laub, Wien

Algebra. Von *B. L. van der Waerden*. Unter Benützung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. I. Teil. Vierte Auflage der modernen Algebra. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band XXXIII.) VIII, 292 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 29.60.

Die vierte Auflage unterscheidet sich von der dritten, im Jahre 1950 erschienenen Auflage nur durch wenige geringfügige Änderungen und Zusätze. Ich darf daher auf die früheren ausführlichen Besprechungen in dieser Zeitschift hinweisen: Mh. Math. **39**, 11 (1932); **45**, 25 (1937) und **55**, 90 (1951).

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Verbandstheorie. Von *H. Hermes*. (Die Grundlehren der mathemathischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIII.) Mit 24 Textbabb., VIII, 164 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 22.80.

Obwohl die Theorie der Verbände gegenwärtig schon einen beträchtlichen Umfang erreicht hat und auch auf zahlreichen Teilgebieten der Mathematik Anwendung findet, gab es bisher noch kein Lehrbuch der Verbandstheorie in deutscher Sprache. Schon aus diesem Grunde ist das Erscheinen des vorliegenden Werkes sehr zu begrüßen, noch viel mehr aber deshalb, weil es sich dabei um eine wirklich ausgezeichnete Einführung in dieses Gebiet handelt. Die relativ ausführliche und sehr klare Darstellung macht das Buch wohl jedem mathematisch einigermaßen vorgebildeten Leser zugänglich, zumal da die verwendeten Grundbegriffe der Mengenlehre und Algebra auch noch in einem eigenen Anhang

zusammengestellt werden; dies geschieht auch mit den im Text gelegentlich verwendeten aussagenlogischen Verknüpfungssymbolen, deren Einsatz manche Beweise kürzer und übersichtlicher macht. An lehrreichen Beispielen wird gezeigt, wie der Verbandsbegriff in verschiedenen Zweigen der Mathematik auftritt; überhaupt kommen die Anwendungen der Theorie durchaus nicht zu kurz. Nicht zuletzt sind die zahlreichen Übungsaufgaben am Ende der Paragraphen zu erwähnen, die dem Leser Gelegenheit geben, sich ohne besondere Mühe deren Lehrstoff noch besser einzuprägen.

Um auf den Inhalt des Buches kurz einzugehen: Zunächst wird der Verband als Algebra eingeführt (der Ausdruck „Algebra" wird in ganz allgemeinem Sinn für eine Menge mit Operationen verwendet), dann werden die einfachsten Eigenschaften der Halbordnungen entwickelt und die beiden Begriffe Verband und Halbordnung in Beziehung gesetzt. Es folgt die Untersuchung der Isomorphismen, Homomorphismen und der Teilbildung in Verbänden und Halbordnungen. Als wichtige Anwendung der anschließend eingeführten Begriffe vollständiger Verband und vollständiger Teilbund wird der Teilbund der abgeschlossenen Teilmengen einer Algebra oder eines Relativs betrachtet. Hierauf werden spezielle Verbandsklassen — distributive, modulare, komplementäre, Boole'sche, atomare Verbände — definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet, der Idealbegriff der Verbandstheorie entwickelt und Fragen der Einbettbarkeit in vollständige Verbände untersucht. (Zu dem Beispiel auf S. 44 sei an dieser Stelle vielleicht bemerkt, daß der Normalteilerverband der alternierenden Gruppe A_4 nicht aus 7, sondern nur aus 3 Elementen besteht.) Interessante Anwendungen finden die modularen Verbände in der projektiven Geometrie — hier wird gezeigt, wie man die projektiven Geometrien rein verbandstheoretisch kennzeichnen kann — sowie in der Theorie der Algebren — hier führt die Untersuchung von Verbänden aus Äquivalenzrelationen schließlich zu einem für beliebige Algebren gültigen Verfeinerungssatz. Die anschließenden Ausführungen über distributive Verbände enthalten den Beweis des Satzes, daß jeder solche Verband einem Mengenverband isomorph ist, und den Satz von der Zerlegung in irreduzible Elemente. Die Boole'schen Verbände werden den Boole'schen Ringen und den Boole'schen Räumen zugeordnet und dadurch sowohl algebraisch, als auch topologisch charakterisiert. Das Schlußkapitel beschäftigt sich unter anderem mit dem Zorn'schen Lemma, das ja eine Aussage über Halbordnungen ist, und den Beziehungen zwischen zweiwertiger klassischer Logik und Boole'schen Verbänden.

Das Buch stellt eine sehr wertvolle Bereicherung der „Grundlehren" dar und sein Studium kann mit gutem Gewissen jedem Mathematiker empfohlen werden.

W. Nöbauer, Wien

La Géométrie des Groupes classiques. Von *J. Dieudonné*. (Ergebnisse der Mathemathik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 5.) VII, 115 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 19.60.

Als „klassische" Gruppen bezeichnet man bekanntlich gewisse Gruppen von linearen Transformationen. Schon vor mehr als 50 Jahren begann man mit dem Studium solcher Gruppen. Über die bis zum Jahre 1935 auf diesem Gebiet erzielten Resultate wurde im ersten Teil des Ergebnisberichtes von *van der Waerden* referiert; wie das Literaturverzeichnis am Ende des vorliegenden Heftes zeigt, sind auch seither wieder zahlreiche diesbezügliche Arbeiten geschrieben worden; vor allem sind hier die Untersuchungen des Verfassers zu erwähnen. Eine zusammenfassende Darstellung des gegenwärtigen Standes der Forschung

über diese Gruppen, wie sie in dem Heft vorgenommen wird, muß daher dem Mathematiker sehr willkommen sein. Natürlich können dabei die Beweise nicht vollständig wiedergegeben werden, es werden aber zumindest ihre Grundgedanken in den meisten Fällen dargestellt.

Zunächst werden die benötigten Begriffe und Sätze der linearen Algebra entwickelt, wobei die Terminologie teilweise aus der Geometrie stammt; gleichzeitig werden die betrachteten Gruppen der Reihe nach definiert. Es handelt sich dabei um die Gruppe aller eineindeutigen halblinearen Transformationen eines Vektorraumes endlicher Dimension über einem Körper (auch Schiefkörper sind zugelassen) sowie bestimmte Faktorgruppen und Untergruppen derselben. Anschließend wird die Struktur dieser Gruppen betrachtet und eine große Zahl von Ergebnissen, vor allem über ihre Zentren, Kommutatorgruppen, Faktorgruppen, erzeugenden Elemente gebracht. In Körpern der Charakteristik 2 tritt dabei manchmal ein von den übrigen Körpern abweichendes Verhalten ein, ebenso erhält man bei kleinen Dimensionen und endlichen Körpern mit wenigen Elementen gelegentlich Ausnahmsfälle. Im nächsten Kapitel werden Sätze behandelt, welche einige dieser Gruppen durch geometrisch formulierte Eigenschaften charakterisieren. Schließlich folgt ein Abschnitt über die Automorphismen der klassischen Gruppen und über die Isomorphismen, welche zwischen diesen Gruppen bestehen; hier gibt es noch manche offene Fragen.

Das Heft vermittelt einen sehr guten Überblick über dieses interessante und reichhaltige Teilgebiet der Algebra.

W. Nöbauer, Wien

Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Von *H. Boerner*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIV.) Mit 15 Textabb., XI, 287 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 33.—, geb. DM 36.60.

Dieses Buch — das erste in deutscher Sprache, welches ausschließlich die Darstellungstheorie behandelt — will durchaus nicht den gesamten heutigen Stand des bereits sehr umfangreichen Gebietes vermitteln, sondern es stellt sich die Aufgabe, auch einen mit der Algebra nur wenig vertrauten Leser vor allem in die Methoden und Ergebnisse der Theorie einzuführen, welche in der Physik Anwendung finden; bei der Bedeutung der Gruppendarstellungen für die Quantenmechanik ist dies natürlich ein sehr berechtigtes Anliegen. Das Buch kommt aber keinesfalls etwa nur dem Physiker zugute, sondern ist auch für den Mathematiker, vor allem für den, der den behandelten Stoff wirklich gründlich kennen lernen will, von großem Wert, zumal da es vollständig auf dem Boden der Mathematik verbleibt und die physikalischen Anwendungen selbst nicht gebracht werden.

Die Auswahl und Anordnung des Stoffes ist durch den Zweck des Buches bestimmt: Es werden grundsätzlich nur Darstellungen in algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik Null betrachtet. Von der allgemeinen Theorie für diese Körper wird so viel entwickelt, als man braucht, um die Darstellungen und Charaktere einiger wichtiger Gruppen zu bestimmen. Zur Vermeidung übermäßigen Aufwandes wird manchmal auf größtmögliche Allgemeinheit verzichtet. Auch in didaktischer Hinsicht entspricht das Werk durchaus dem angestrebten Ziel: Es werden vom Leser nur wenig Vorkenntnisse verlangt; alle benötigten Sätze und Begriffe der linearen Algebra und Gruppentheorie werden in den beiden ersten Kapiteln sehr übersichtlich zusammengestellt, wobei weniger bekannte Tatsachen auch bewiesen werden. Der Text ist klar geschrieben, die Beweise sind ausführlich, so daß das Buch gut lesbar ist.

Im einzelnen wird nach den bereits erwähnten Vorbereitungskapiteln zunächst die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen mit Hilfe des Gruppenringes behandelt; unabhängig davon wird die Theorie der Gruppencharaktere nach *Schur* entwickelt. Anschließend werden Darstellungen und Charaktere kontinuierlicher Gruppen unter geeignet gewählten einschränkenden Voraussetzungen besprochen. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen einer Gruppe und denen einer Untergruppe vom Index 2 wird ausführlich dargelegt und später dazu benützt, um von der symmetrischen auf die alternierende Gruppe zu schließen und umgekehrt von der Drehgruppe auf die volle orthogonale Gruppe. Gewissermaßen als Beispiel für die allgemeine Methode werden die Darstellungen der symmetrischen Gruppe genau behandelt. Bei der vollen linearen Gruppe werden zunächst die ganzrationalen Darstellungen gewonnen, wobei von Tensorräumen Gebrauch gemacht wird. Daraus ergeben sich dann alsbald die ganzrationalen Darstellungen der reellen linearen, unimodularen und unitären Gruppe und schließlich auch die stetigen Darstellungen aller dieser Gruppen. Die anschließend berechneten Charaktere der vollen linearen Gruppe werden dazu verwendet, die Charaktere der symmetrischen Gruppe zu ermitteln. Bei der Drehgruppe werden nach einer Methode von *Stiefel* zunächst die einfachen Charaktere und die eindeutigen Darstellungen festgestellt; dann werden die Spindarstellungen unter Verwendung der Clifford'schen Zahlen auf zwei verschiedenen Wegen erhalten. Nach einigen speziellen Sätzen über Drehgruppen der Dimensionen 3, 4 und 5 wird abschließend noch kurz die Lorentz-Gruppe behandelt. Auch das umfangreiche Literaturverzeichnis zeugt von der Sorgfalt, mit der das Buch geschrieben ist.

Es dürfte wohl kaum einen Mathematiker oder Physiker geben, der von dem Studium dieses schönen Werkes nicht reichen Gewinn davontragen wird.

W. Nöbauer, Wien

Einführung in die Zahlentheorie. Von *A. Scholz* †. Überarbeitet von *B. Schoeneberg*. Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Band 1131.) 128 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 2.40.

Wie bei einer Einführung in die Zahlentheorie zu erwarten ist, beschränkt sich das Buch auf die rationale Zahlentheorie. Es bringt Teilbarkeitsregeln der natürlichen Zahlen, Elementares über Primzahlverteilung, zahlentheoretische Funktionen, Kongruenzen, den kleinen Fermatschen Satz, Primitivwurzeln, Darstellung durch Quadratsummen, quadratische Reste, das quadratische Reziprozitätsgesetz, Darstellbarkeit von Zahlen durch binäre quadratische Formen, die Reduktion der definiten und indefiniten binären quadratischen Formen und automorphe Substitutionen. Ich habe die erste Auflage, die 1939 erschienen ist, ausführlich und kritisch in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **49**, 4) besprochen. Ich habe hervorgehoben, daß das Buch außerordentlich inhaltsreich ist, die Darstellung aber für einen Göschen-Band zu knapp ist. Die zweite Auflage, die von *Schoeneberg* herausgegeben wurde, ist leichter verständlich. Die mengentheoretische Einleitung wurde stark gekürzt und das letzte Kapitel über das algorithmische Rechnen wurde ganz weggelassen. Auch sonst wurden kleinere Kürzungen vorgenommen. Die Sätze werden ausführlich formuliert, jeder Telegrammstil wurde vermieden. Die Darstellung ist klar, fordert aber noch immer vom Leser anstrengende Mitarbeit.

N. Hofreiter, Wien

Arytmetika Teoreticzna. Von *W. Sierpiński*. Unter Mitarbeit von *J. Losia*. (Biblioteka Matematyczna: Tom 7.) 258 S. Warszawa. 1955.

Das Werk besteht aus drei Teilen, von denen der erste von *J. Losia* und die beiden anderen von *W. Sierpinski* verfaßt wurden. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Axiomatik der nichtnegativen ganzen Zahlen und bringt neben dem Üblichen auch tiefere Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, sowie einige interessante historische Hinweise über die Zahlensysteme bei den alten Völkern. Der zweite Teil soll eine Einführung in die elementare Zahlentheorie geben und ist hiezu hervorragend geeignet. Hier findet sich z. B. ein Beweis des Bertrand'schen Postulates, einige Diophantische Gleichungen, Darstellung von Zahlen durch vier Quadrate sowie ganz ausgezeichnete und originelle Übungen zu den einzelnen Abschnitten. Verschiedene Dinge, die über den Rahmen des Buches hinausgehen, werden in Anmerkungen erklärt und mit Literaturhinweisen versehen. Hierzu darf vielleicht bemerkt werden, daß nicht nur bewiesen ist, daß jede genügend große natürliche Zahl als Summe von 17 vierten Potenzen ganzer Zahlen darstellbar ist (vgl. S. 152), sondern daß dazu schon 16 solche Potenzen ausreichen, wie *Davenport* beweisen konnte. Der dritte Teil des Buches gibt zunächst eine Einführung in die Theorie der reellen Zahlen und bringt sodann einiges über Kettenbrüche, z. B. auch die Gesetze über die beste Annäherung einer Irrationalzahl durch ihre Näherungsbrüche. Den Schluß bildet eine kurze Auseinandersetzung des Rechnens mit komplexen Zahlen und Quaternionen, wobei auch auf die allgemeinen hyperkomplexen Systeme und den Satz von *Frobenius* hingewiesen wird.

Das Schöne an dem Buch ist, daß es sich ganz anspruchslos gibt und trotzdem eine sehr gründliche Einführung in das recht umfangreiche Gebiet der theoretischen Arithmetik vermittelt. *K. Prachar*, Wien

Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben. Von *I. P. Natanson.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik.) Mit 29 S., 12 Textabb., Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 2.30.

In diesem Büchlein werden in sehr ausführlicher Weise und leicht verständlich 18 der bekannten Extremaufgaben ohne Verwendung der Differentialrechnung gelöst. Es werden dabei die einfachsten Eigenschaften des quadratischen Trinoms und eine sich auf das arithmetische und geometrische Mittel beziehende Ungleichung verwendet. Dieses Bändchen ist unseren Mittelschülern in der 7. und 8. Klasse sehr zu empfehlen. Sie sollen zum Auffinden eines Lösungsweges angeregt werden, der für jede Extremaufgabe eigens gefunden werden muß; sie sollen daraus auch erkennen, welchen Vorteil die einheitliche Methode der Differentialrechnung bietet.

Bei einer Neuauflage wären die Figuren 6, 7, 10 und 11 zu verbessern und der Text der Aufgabe 3 in der Einführung zu ergänzen. *J. Laub*, Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *R. Courant.* I. Band: Funktionen einer Veränderlichen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Textabb., XI, 450 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 33.—.

In diesem Lehrbuch werden Differentiation und Integration von vornherein gemeinsam eingeführt. Im Zusammenhange der Integral- und Differentialrechnung ergibt sich ein höchst einfacher und natürlicher Zugang zu der Exponentialfunktion und dem Logarithmus. Bei der hier gegebenen Darstellung entstehen bei den Stetigkeitsfragen keinerlei Schwierigkeiten, da der Logarithmus von vornherein als Integral und somit als stetige und differenzierbare Funktion seines Argumentes gekennzeichnet ist und die Stetigkeit der Umkehrfunktion,

also der Exponentialfunktion, sich von selbst versteht. Ein weiteres Kennzeichen des Buches ist die Betonung des engen Zusammenhanges der mathematischen Analysis mit der physikalischen Realität. Zahlreich sind die Anwendungen auf Physik und Geometrie. Ganz ausgezeichnet ist die Darstellung. Die Begriffe werden anschaulich motiviert, und die Probleme werden sehr gut erklärt.

Die ersten beiden Auflagen in deutscher Sprache erschienen 1927 und 1930 (siehe Monatsh. f. Math. **35**, 58—60 (1928). Äußere Gründe waren es, daß nun Übersetzungen in mehrere Sprachen erfolgten, und daß die dritte Auflage in deutscher Sprache erst jetzt erschien. An zahlreichen Stellen finden sich Änderungen gegenüber der zweiten Auflage; im ersten Kapitel bemerkt man eine etwas schärfere Formulierung und eine noch ausführlichere Begründung. In den späteren Kapiteln erfolgten kleine Verbesserungen und mehrere kleine Ergänzungen wie z. B. der 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung, der Weierstraßsche Konvergenzsatz für die Approximation von stetigen Funktionen, das Iterationsprinzip, die Bernoullischen Polynome und die Eulersche Summenformel.

Das Buch ist nach wie vor ein ideales Lehrbuch für Studierende der Mathematik und der Physik.

N. Hofreiter, Wien

Differential- und Integralrechnung. Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse. Von *O. Haupt*, unter Mitarbeit von *G. Aumann*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Unter Mitwirkung von *Ch. Y. Pauc*. III. Band: Integralrechnung. (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Band 26.) XI, 319 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 28.—.

Mit dem Erscheinen des 3. Bandes hat die unter Mitwirkung von *C. Y. Pauc* zustande gekommene Neubearbeitung des verdienstvollen Werkes ihren Abschluß gefunden. Die Verfasser haben damit ihr Ziel, die Grundlagen der Infinitesimalrechnung von möglichst allgemeinen, der heutigen algebraisierenden Tendenz entsprechenden Gesichtspunkten aus zu entwickeln, erreicht.

Ein Eingehen auf Einzelheiten ist bei der Fülle des verarbeiteten Stoffes kaum möglich, daher soll nur eine kurze Übersicht über den Inhalt gegeben werden.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Theorie der Boole'schen Verbände und schließt hieran die Theorie von Inhalt und Maß. Hierauf folgt die Lehre von den meßbaren Funktionen und die Definition des Lebesgue-Integrals (bezüglich beliebiger Maße) als Unterteilungsintegral bei Zerlegung des Integrationsbereiches in abzählbar viele Teile. Hieran schließt sich die Theorie der total-additiven Mengenfunktionen und der stetigen linearen Funktionale, wobei gezeigt wird, wie der Integralbegriff auch von dieser Seite her gewonnen werden kann. An dieser Stelle findet auch der Begriff des *Hilbert*-Raumes seinen Platz. Ein Abschnitt über Maße und Integrale in Produkträumen führt zum Satz von *Fubini* und gibt auch Anlaß zur Betrachtung von abzählbar-vielfachen Integralen. Es folgt dann eine sehr allgemein gefaßte Theorie des *Riemann-Stjeltjes*-Integrals, die sich auf die *Burkill*'sche Definition des Integrals einer Mengenfunktion stützt. Ein kurzer Bericht über lineare Funktionale in topologischen Räumen zeigt, wie man von dieser Seite her zu demselben Integralbegriff gelangt. Dann wenden sich die Verfasser dem Problem der Stammfunktionen zu, wobei der Integralbegriff von *Denjoy* seinen natürlichen Platz findet. Als Abschluß wird die Theorie des Maßes dehnungsbeschränkter m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_n entwickelt und bis zur Herleitung der Integralsätze von *Gauß-Green-Stokes* geführt.

Innerhalb des hier kurz skizzierten Rahmens haben die Verfasser in bewundernswerter Weise eine Fülle von Material unter einheitlichen Gesichtspunkten und zum großen Teil mit eigenständigen Methoden zu einem organischen Ganzen gestaltet. So ist ein Werk entstanden, das nach Meinung des Referenten kaum für den Anfänger geeignet ist — ihm wird mit einer Darstellung, die unter Verzicht auf größtmögliche Allgemeinheit die wesentlichen Methoden in einem engeren Bezirk zur Kenntnis bringt, eher gedient sein — aber dem Fortgeschrittenen eben durch die Vielfalt und Vollständigkeit der dargestellten Theorien von größtem Wert sein wird.

Für eine eventuelle Neuauflage würde sich der Referent im Interesse der Übersichtlichkeit eine weniger raumsparende satztechnische Ausstattung wünschen. Ebenso würde er gerne den sprachlich sehr anfechtbaren Ausdruck „aufsteigender Limessatz" vermieden sehen — Kürze des Ausdrucks ist gewiß anzustreben, aber doch nur im Rahmen des sprachlich Möglichen.

J. Radon, Wien

Vorlesungen über Orthogonalreihen. Von *F. G. Tricomi*. Übersetzt und zum Druck bearbeitet von *F. Kasch*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXVI.) Mit 13 Textabb. VIII, 264 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955, DM 34.—, geb. DM 37.60.

Das Ziel dieses Buches ist es, den Leser „möglichst rasch" in die Theorie der trigonometrischen Reihen und orthogonalen Polynome einzuführen. Im ersten Kapitel werden allgemein die orthogonalen Funktionensysteme behandelt. Hier finden sich Dinge wie der Satz von Fischer-Riesz, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit eines Funktionensystems, welche erst in jüngster Zeit von Dalzell gegeben wurde, Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen und der ganzzahligen Potenzen. Das zweite Kapitel bringt die allgemeine Theorie der trigonometrischen Reihen; totalstetige Funktionen und Funktionen beschränkter Schwankung, Konvergenzbedingungen von Dirichlet, Dini und Lipschitz, Riemann'scher Satz über das lokale Verhalten der Fourierreihe, ein Satz über das Vorzeichen der Annäherung einer Funktion durch die Partialsummen ihrer Fourierreihe. Mit der feineren Theorie der Konvergenz trigonometrischer Reihen beschäftigt sich das dritte Kapitel: Satz von Lusin-Denjoy über die absolute Konvergenz, Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz, Differentiation und Integration, Satz von Fejér über die C_1-Summierbarkeit der Fourierreihe, A-Summierbarkeit einer Fourierreihe, Riemann'sche Summationsmethode, Satz von Cantor-Lebesgue, einfachste Eigenschaften der Fouriertransformierten. In den drei folgenden Kapiteln, die den zweiten Teil des Buches ausmachen, werden die orthogonalen Polynome behandelt, und zwar zunächst die Eigenschaften, welche für möglichst allgemeine Belegungsfunktionen gelten, wie: Rekursionsformel, Summationsformel von Christoffel-Darboux, Formel vom Rodrigues'schen Typus, allgemeines über die Lage der Nullstellen. Dann werden die speziellen orthogonalen Polynome betrachtet, indem zunächst aus der hypergeometrischen Reihe die Jacobi'schen Polynome abgeleitet werden, aus denen sich dann die übrigen meist als Spezialfälle ergeben. Für alle diese Polynome werden Entwicklungssätze, Lage der Nullstellen, asymptotisches Verhalten usw. untersucht. Genauer werden auch die Eigenschaften der Kugelfunktionen entwickelt. Das Schlußkapitel behandelt diesen Fragenkreis für die Laguerre'schen und Hermite'schen Polynome.

Das Werk ist in didaktischer Hinsicht ausgezeichnet verfaßt, trotzdem oft schwierige Dinge behandelt werden, stets leicht lesbar und ohne große Vorkennt-

nisse verständlich. Eine sehr zu empfehlende, fast mühelose, Einführung in das interessante Gebiet. *K. Prachar*, Wien

Konstruktive Funktionentheorie. Von *I. P. Natanson*. XIV, 515 S. Berlin: Akademieverlag, 1955. DM 36.—.

Die konstruktive Funktionentheorie, von *S. N. Bernstein* so bezeichnet, befaßt sich mit der approximativen Darstellung beliebiger Funktionen durch einfache analytische Funktionen; dieses Gebiet ist, beginnend mit *Tschebyscheff*, vielfach gerade von russischen Mathematikern wie *Bernstein*, *Natanson*, *Stekloff*, u. a. bearbeitet worden. Der vorliegende stattliche Band enthält in einer zumindest anfangs breiten, immer aber klaren Darstellung die wichtigsten Problemkreise, wobei es dem Verf. in erster Linie um die Heraushebung der Ideen und nicht sosehr auf die Vollständigkeit ankommt. Der erste Teil gilt der Approximation durch algebraische und trigonometrische Polynome, wobei als Maß der Approximation das Maximum der absoluten Differenz von Funktion und Polynom genommen wird; ausgehend von den Weierstraß'schen Sätzen werden dann die Tschebyscheff'schen Polynome behandelt, der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Funktion und dem Grad ihrer besten Approximation durch Polynome (*Bernstein*, *Zygmund*), Fourierreihen (die Summen von *Fejer* und von *de la Vallee-Poussin*) und schließlich die beste Approximation an analytische Funktionen (ohne komplexe Funktionentheorie). — Im zweiten Teil wird die Approximation im Mittel untersucht: demgemäß werden zunächst allgemein Orthogonalsysteme gebracht, die Sätze von *Müntz*, die Legendre'schen und die Jacobi'schen Polynome, das Momentenproblem für endliche Intervalle und schließlich für unendlich-große Intervalle (die Polynome von *Laguerre* und *Hermite*). — Der dritte Teil bringt Interpolation und Näherungsquadraturen: nach Aufstellung der Interpolationsformeln werden die bekannten Beispiele von *Bernstein* und von *Marcinkiewicz* für die Divergenz eines Interpolationsprozesses gegeben; Konvergenz von solchen Verfahren — das Verfahren von *Bernstein*. Bei den Näherungsquadraturen werden analoge Konvergenzfragen untersucht (Sätze von *Stekloff* und *Kusmin*). Das Problem von *Tschebyscheff* und ein Satz von *Bernstein*.

Es ist dem Übersetzer und dem Verlag zu danken, daß dieses schöne Werk nun auch in deutscher Sprache vorliegt. *H. Hornich*, Graz

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Von *L. Heffter*. Mit 13 Abb. im Text, VIII, 63 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 12.60.

Der Verfasser hat, schon beginnend mit einer 1901 erschienenen Arbeit über den Beweis des Cauchy'schen Satzes, in einer Reihe von Arbeiten eine möglichst elementare Begründung der Funktionentheorie unternommen: elementar, d. h. hier ohne allgemeine Kurvenbegriffe, nur mit Hilfe von achsenparallelen Rechteckseiten und ohne Maßtheorie. In dieser kleinen Schrift hat der rüstige Autor eine Zusammenstellung der verschiedenen Gesichtspunkte und Eingänge zur Funktionentheorie und eine kritische Übersicht über die bisher gegangenen Wege gegeben, die wohl auch dem Studierenden die Grundzüge dieser Wissenschaft vermitteln kann. *H. Hornich*, Graz

Analytische Fortsetzung. Von *L. Bieberbach*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 3.) IV, 168 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 24.80.

Aus den zahlreichen Problemkreisen um die Fortsetzbarkeit von Potenzreihen werden hier u. a. gebracht: Eine ausführliche Diskussion über den Hadamard'schen Multiplikationssatz, ein Test für singuläre Stellen eines Funktionselementes; verschiedene Lückensätze (*Fabry, Ostrowski, Pólya*; die Überkonvergenz wird nicht behandelt). Häufigkeit der nicht fortsetzbaren Reihen; Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, ganzen rationalen Koeffizienten, ganze ganzwertige Funktionen, Koeffizienten als Funktionen ihrer Nummer. — Man fühlt sich dem Verfasser zu Dank verpflichtet, daß er das so sehr verstreute Material gesammelt und mit seiner großen Darstellungskunst wiedergegeben hat.

H. Hornich, Graz

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Von *L. Collatz*. Mit 118 Textabb. und einem Porträt, XV, 526 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LX.) Zweite, neubearbeitete Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 56.—, geb. DM 59.60.

Vor vier Jahren erschien die erste Auflage (Besprechung im Monatsh. Math. **55**, 356—357/1951). Sie brachte die wichtigsten numerischen Verfahren zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Es wurden die allgemeinen Methoden dargelegt und an zahlreichen aus der Praxis entnommenen Beispielen illustriert. Der Verfasser schrieb damals: „Die Aufstellung einfacher und zugleich genügend genauer Fehlerabschätzungen wird eine der dringendsten Aufgaben der praktischen Analysis in der Folgezeit sein. In besonderem Maße gilt dies für die Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen." Seither sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen Fehlerabschätzungen gemacht wurden. Diese und die übrigen seither erschienenen einschlägigen Arbeiten wurden in der zweiten Auflage eingearbeitet. Im neuen Kapitel I werden eine Reihe von Hilfsmitteln und allgemeinen Prinzipien zusammengestellt. Insbesondere seien die Fehlerabgleichsprinzipien und die Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis angeführt. Die funktionalanalytische Darstellung ist zwar etwas abstrakt, hat sich aber als sehr fruchtbar erwiesen. Die im ersten Kapitel angestellten allgemeinen Überlegungen haben für den Autor den Vorteil, daß er sich später viel erspart, für den nicht gut vorgebildeten Leser allerdings den Nachteil, daß er das Buch von Anfang an schwer versteht. Es ist Lesern erst dann anzuraten, wenn sie bereits einige Vorkenntnisse aus der Theorie der Differentialgleichungen haben. Der bedeutendste Wert des Buches liegt darin, einen Überblick über die ungeheuer große Zahl von Einzelarbeiten zu geben und die allgemeinen Methoden an vollständig durchgerechneten Beispielen zu erproben. Selbstverständlich ist es auch heute noch dringend erwünscht, die vorhandenen Näherungsverfahren in größerem Umfang als bisher praktisch zu erproben und theoretisch zu erforschen. Das Buch liefert weiterhin die Grundlagen hiezu.

N. Hofreiter, Wien

Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Von *C. Miranda*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 2.) VIII, 222 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 28.80.

Das Buch gibt eine zusammenfassende, moderne Darstellung der elliptischen Differentialgleichungen von n Variablen. Nachdem in den ersten beiden Kapiteln die grundlegenden Begriffe, Integralformeln sowie die Integraldarstellung von Funktionen behandelt wurden, folgen die Randwertprobleme durch Rückführung auf Integralgleichungen, wie sie in diesem allgemeinen Fall zuerst von *Levi*,

Giraud u. a. gegeben wurden. Sodann werden auch die verallgemeinerten Lösungen betrachtet, wie sie von *Wiener*, *Perron* u. a. eingeführt wurden, und weiter mit Verwendung des Satzes von *Hahn-Banach-Ascoli* durch Arbeiten von *Cimmino*, *Caccioppoli* u. a. und ferner die Methode von *Picone-Fichera*. Verhalten der Lösungsfunktionen und Koeffizienten (Hölderbedingungen). — Es folgen die Analytizitätsfragen der Lösungen (*Bernstein*) auch für nichtlineare Differentialgleichungen. Nur kurz werden am Schluß vermischte Differentialgleichungen, Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen behandelt. *H. Hornich*, Graz

Second Colloque sur les Equations aux Dérivées Partielles. 128 S. Liége: G. Thone, Paris: Masson & Cie. 1955. ffr. 1500.—.

Von dem belgischen Centre de Recherches Mathèmatiques wurden bereits zahlreiche Kolloquien über Spezialgebiete der Mathematik abgehalten, welche ausführlicher, als dies bei großen Kongressen zu geschehen pflegt, prominente Vertreter dieser Spezialgebiete zu Worte kommen lassen. Der vorliegende Band enthält die Vorträge, die bei einem solchen Kolloquium über partielle Differentialgleichungen gehalten wurden, welches vom 24. bis 26. Mai in Brüssel stattgefunden hat. Die Titel der interessanten Vorträge waren die folgenden: *M. Picone*, Über ein neues Problem für die lineare partielle Differentialgleichung der klassischen mathematischen Elastizitätstheorie; *L. Schwartz*, Randwertprobleme bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen; *J. L. Lions*, Gemischte Randwertprobleme; *J. Leray*, Abelsche Integrale und Grundlösungen der hyperbolischen Gleichungen; *M. Brelot* und *M. G. Choquet*, Harmonische und polyharmonische Polynome; *G. de Rham*, Über gewisse Gleichungen aus der Theorie der harmonischen Differentialformen; *H. G. Garnir*, Green'sche „Funktionen" für die Randwertprobleme der Wellengleichung; *L. Fantappiè*, Neue Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen.

Wie auch bei vorhergehenden Kolloquien über algebraische Geometrie, gefaserte Räume, Differentialgeometrie, Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen, so wird auch die Veröffentlichung dieser Vorträge dazu beitragen, daß der allgemein interessierte Mathematiker besser darüber informiert ist, was in seiner Wissenschaft alles geschieht. *K. Prachar*, Wien

Fourierreihen. Von *G. P. Tolstow*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 14.) XI, 300 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955.

Das vorliegende Werk will nicht in die subtile Theorie der Fourierreihen im Rahmen der Theorie der reellen Funktion einführen, sondern mit den Hauptergebnissen der Theorie und den Anwendungen in der Physik vertraut machen. Es werden nicht nur Fourierreihen im engeren Sinne betrachtet, sondern auch allgemeinere Orthogonalsysteme als das trigonometrische. Einige Dinge, die man sonst in den einschlägigen Lehrbüchern seltener findet, wie die Verbesserung der Konvergenz von Fourierreihen, die angenäherte Berechnung der Fourierkoeffizienten und insbesondere die Theorie der trigonometrischen Doppelreihen, sind hier dargestellt. Ein Kapitel ist den Besselfunktionen, ein weiteres den Fourier-Besselreihen gewidmet. Recht ausführlich sind Randwert- und Eigenwertaufgaben der mathematischen Physik behandelt. Insbesondere den Problemen der Wärmeleitung ist viel Raum gewidmet. Die Herausgeber haben das karge Literaturverzeichnis des Verfassers durch die wichtigsten einschlägigen Lehrbücher bereichert. Es ist kein Zweifel, daß das Buch dem Studierenden gute Dienste leisten wird. *L. Schmetterer*, Wien

Continuous Transformations in Analysis. With an introduction to algebraic topology. Von *T. Rado* und *P. V. Reichelderfer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXV.) Mit 53 Textabb., VII, 442 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 59.60.

Das Ziel des Buches ist das Studium allgemeiner, d. h. nicht notwendig eineindeutiger stetiger Abbildungen im R_n. Diese Untersuchungen, die vielfach auf die Verf., *Federer* u. a. zurückgehen, benötigen manches aus der algebraischen Topologie, insbesondere die Kohomologietheorie. Es wird vom Leser nicht verlangt, daß er mit diesen Dingen vertraut ist: Der erste Teil des Buches ist einer Einführung in die algebraische Topologie gewidmet. Der zweite Teil „Topologische Studie stetiger Transformationen im R_n" führt die wichtigen Begriffe des topologischen Index und der Vielfachheitsfunktion ein, wobei sich die Verf. nach *Federer* der *Čech*'schen $(n+1)$-dimensionalen Kohomologiegruppe bedienen. Auf die Verf. gehen auch die Begriffe der positiven und negativen Vielfachheitsfunktion zurück. Darauf bauen nun Definitionen der beschränkten Variation, der absoluten Stetigkeit und der verallgemeinerten Funktionaldeterminante auf. Ein weiterer Teil des Buches ist den differenzierbaren Transformationen gewidmet und schließlich werden die Untersuchungen der vorhergehenden Kapitel auf den zweidimensionalen Fall spezialisiert, wobei jedoch Bedacht darauf genommen wird, die Besonderheiten dieser Spezialisierung gegenüber dem allgemeinen Fall herauszuarbeiten. Gerade die Untersuchungen für $n = 2$ haben ja zu vielen n-dimensionalen Verallgemeinerungen den Weg gewiesen. Abgesehen von einer Reihe von Lehrbüchern der Topologie und der reellen Funktionen sind nur wenige spezielle Literaturhinweise, meist auf Arbeiten der Verf. gegeben. Die Lektüre des Buches setzt außer der Fähigkeit abstrakt denken zu können, Kenntnisse aus der Theorie der reellen Funktionen und der Gruppentheorie voraus. Man wird das Werk nur dem fortgeschrittenen Studenten empfehlen können. Der auf diesem Gebiet Forschende wird viel Neues finden und das flüssig geschriebene Buch mit Vergnügen lesen.

L. Schmetterer, Wien

Selected Papers in Statistics and Probability. Von *A. Wald*. Herausgegeben vom Institut für Mathematische Statistik. IX, 701 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1955. sh 60.—.

Dieser Band enthält fast alle Arbeiten soweit sie das Schaffen *Walds* auf statistischem und wahrscheinlichkeitstheoretischem Gebiet betreffen. Ausgenommen sind nur einige Abhandlungen, welche als Grundlage für die beiden Bücher *Walds* über die Theorie der Entscheidungsfunktionen und der Sequentialanalyse dienten und daher leicht zugänglich sind. Dem Abdruck der Arbeiten geht eine Aufzählung sämtlicher Publikationen *Walds* voraus sowie eine Würdigung und Besprechung seiner Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Es ist sehr erfreulich, daß nun dieser Teil der Arbeiten *Walds* leicht zugänglich ist und zu einem eindrucksvollen Bild seines Schaffens zusammengefaßt ist. Anderseits bedauert man es, daß die Herausgabe nur auf ein, — wenn auch bedeutendes — Teilgebiet der Publikationen *Walds* beschränkt ist. Die Aufnahme wenigstens der bedeutendsten geometrischen Arbeiten, die in seinen Wiener Jahren bei *K. Menger* entstanden sind, wäre eine willkommene Ergänzung gewesen.

L. Schmetterer, Wien

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Von *G. Bangen* und *R. Stender*. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts: Heft 3.) Mit 29 Textabb., 56 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle Verlag. 1954. DM 4.40.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik haben sich im 20. Jahrhundert rasch entwickelt. Neben dem theoretischen Aufbau erfolgte gleichzeitig eine große Ausweitung ihrer Anwendungsmöglichkeiten auf verschiedene Gebiete der Naturwissenschaften und Technik. Die Verfasser sind der Meinung, daß man Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik auch im Unterricht bringen kann und soll. Ein großer Teil der Schüler hat später im Laufe des Lebens in irgend einer Weise mit Statistik zu tun und hat daher durch eine Einführung in die mathematische Statistik auf der Schule auch einen Nutzen fürs Leben. Die Verfasser haben kein Lehrbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik geschrieben, sondern zeigen dem Lehrer, was man im Unterricht bringen kann und wie dies geschehen soll. Zunächst wird über die heutige Stellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik in der Mathematik und in den Naturwissenschaften referiert. Dann folgt ein Lehrgang. Darin kommen vor: relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Summenregel und Produktregel für Wahrscheinlichkeiten, das Gesetz der großen Zahl, Binomialverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte, Wahrscheinlichkeitsintegral, Theorie der Beobachtungsfehler, Geschwindigkeitsverteilungsgesetz von *Maxwell*. Am Schluß stehen Aufgaben, Lösungen und ein Literaturverzeichnis. Das Heft paßt sehr gut in die Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts und ist ein wertvoller Behelf für den Lehrer an höheren Schulen.

N. Hofreiter, Wien

Elements of Statistics. Von *E. B. Mode*. Zweite Auflage. XI, 377 S. New York: Prentice Hall. 1951.

Es handelt sich um ein im didaktischen Aufbau recht geschicktes elementares Lehrbuch, welches bis zur einfachsten Varianzanalyse und dem Gebrauch der Spannweite für die Anlage von Kontrollkarten reicht. Hervorgehoben müssen die zahlreichen Beispiele werden sowie ein auf alle Gebiete der Statistik sich erstreckendes Verzeichnis von Lehrbüchern.

L. Schmetterer, Wien

Versicherungsmathematik. Erster Teil. Von *W. Saxer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIX.) IX, 249 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 36.—, geb. DM 39.60.

Das Buch ist als „Ersatzband" für das längst vergriffene bekannte Lehrbuch von *Loewy* gedacht. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei jedoch gleich hier darauf hingewiesen, daß es sich um eine durchaus selbständige moderne Darstellung handelt. Allerdings liegt bisher nur der erste „elementare" Band vor. Die nötigen Vorkenntnisse für das Verständnis des Bandes sind auf ein Minimum reduziert, da im Wesentlichen nur die diskontinuierliche Methode zur Darstellung kommt. Aus der Behandlung des üblichen Stoffgebietes soll besonders die für die Praxis heute so wichtige Pensionsversicherung hervorgehoben werden. Besonders erfreulich ist es, daß dem Verf. der Einbau neuerer Ergebnisse gelungen ist, welche den Formelapparat der Versicherungsmathematik in gedanklicher Weise bereichern, so daß auch der Anfänger bereits sieht, in welcher Richtung die moderne mathematische Forschung auf diesem Gebiet liegt. Wir erwähnen die Untersuchungen von *Schärf* über die allgemeinen Variationsprobleme in der

Versicherungsmathematik, das Kapitel über die Erneuerungstheorie und den Anhang über die wahrscheinlichkeitstheoretischen (stochastischen) Modelle. Dem Konzept des Buches entsprechend verzichtet der Autor auch hier auf volle Allgemeinheit, wofür einige Literaturhinweise entschädigen. Auf Grund dieses ersten gelungenen Bandes wird man dem zweiten Band, der sich offenbar schwierigerer Hilfsmittel der Analysis bedient und wohl auch die Risikotheorie bringen wird, mit Interesse entgegensehen. *L. Schmetterer*, Wien

Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. Von *A. P. Speiser*. Zweite, unveränderte Auflage. (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der E. T. H. Zürich. Herausgegeben von E. Stiefel: Nr. I.) Mit einem Anhang, 67 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1954. sfr. 6.75.

Die vorliegende Schrift erschien in erster Auflage 1950. Das Rechengerät, welches der Verfasser vorschlägt und sich jetzt im Bau befindet, zeichnet sich durch einen verhältnismäßig einfachen Aufbau aus, gehört aber trotzdem zu den schnellen Maschinen. Es besteht aus 1000 Elektronenröhren, 300 elektromagnetischen Relais und besitzt einen magnetischen Speicher, mit einem Fassungsvermögen von 1200 Worten, wobei ein Wort gleich einer 12stelligen Zahl sein kann. Trotzdem beträgt die Multiplikationszeit nur 30 ms. Ausführlich wird die Gestaltung des Rechenwerkes beschrieben, die eine Anzahl interessanter Gedanken verwendet. Besonders hervorzuheben ist die sehr klare und instruktive Darstellung. Daß nach so kurzer Zeit eine zweite Auflage erforderlich war zeigt, daß die vorliegende Schrift ihren angestrebten Zweck vollauf erfüllt. Die Lektüre dieser Broschüre kann nur empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Controller, das ideale Rechengerät. München 15: E. v. Stojkovits. Salzburg-Lehen: Th. Ullmann. DM 13.80, S 95.—.

Der Controller ist im Prinzip ein logarithmischer Rechenschieber, aber die Anordnung ist kreisförmig. Der Durchmesser beträgt nur 75 mm. Daher kann der Controller in jede Tasche eingesteckt werden. Er besteht aus zwei Metallscheiben, von denen die innere beweglich ist. Er enthält wie die besseren Rechenstäbe drei Skalen, neben der quadratischen noch eine kubische Skala. Die Anzahl der Markierungspunkte ist die gleiche wie beim Rechenstab von 25 cm Länge, nur sind die Abstände etwas kleiner. Daher ist die Genauigkeit etwas geringer als beim Rechenstab von 25 cm Länge. Ein großer Vorteil der kreisförmigen Anordnung ist der, daß jedes Ergebnis abgelesen werden kann, während beim Rechenstab nur die Zahlen der Zunge brauchbar sind, die über der festen Skala stehen. Während die Skalen eines Rechenstabes beim Gebrauch nicht berührt werden, ist dies beim Controller unvermeidlich. Doch garantiert die Güte der Herstellung für lange Haltbarkeit. Mit dem Controller kann man dieselben Rechnungen durchführen wie mit einem Rechenschieber, er eignet sich also besonders für technische und kaufmännische Rechnungen, hat aber den Vorteil der kreisförmigen Anordnung. *N. Hofreiter*, Wien

Les Fondements de la Géométrie. Von *B. Kerékjártó*. Band I: La Construction élémentaire de la Géométrie euclidienne. 340 S. Budapest: Akadémiai Kiado. 1955. $ 5.—.

Der 1946 verstorbene Autor hat sein Werk über die Grundlagen der Geometrie in ungarischer Sprache veröffentlicht; der erste Band erschien 1937, der

zweite kurz vor seinem Tod. *F. Riesz* erfüllt nun eine Freundespflicht, indem er eine französische Ausgabe dieses Werkes veranlaßt und es damit einem größeren Leserkreis zugänglich macht. Vorläufig liegt der erste Band vor, der die Grundlagen der euklidischen Geometrie enthält. Der zweite Band soll Flächeninhalt und Volumen, die Grundlagen der projektiven und der nichteuklidischen Geometrie sowie tiefergehende Untersuchungen zur Axiomatik enthalten.

Der Verfasser baut seine Entwicklungen auf einem Axiomensystem auf, das in seiner Gruppierung mit dem von *Hilbert* identisch ist. Innerhalb der einzelnen Gruppen weicht er allerdings von *Hilbert* ab, vor allem in der Auswahl der Axiome der Kongruenz und der Stetigkeit. Bei den ersteren wird von der Streckengleichheit ausgegangen, hierauf werden die kongruenten Transformationen und mit ihrer Hilfe die Winkelgleichheit definiert. Die Stetigkeit wird zunächst mengentheoretisch eingeführt, indem von den Punkten der Geraden gefordert wird, daß sie eine zusammenhängende separable Menge bilden. Die verschiedenen anderen Möglichkeiten, die Stetigkeit axiomatisch zu fassen, werden sorgfältig diskutiert.

Das Buch enthält viele interessante Entwicklungen, die weit über die bloße Grundlegung hinausgehen und Gegenstände, die man selten behandelt findet, in origineller Weise zur Darstellung bringen. So wird anschließend an die Anordnungsaxiome die Theorie der Polygone und Polyeder bis zum Beweis der Zweiteilung des Raumes durch ein einfaches Polyeder geführt, anschließend an die Kongruenzaxiome werden zahlreiche geometrische Sätze ohne Parallelenaxiom bewiesen u. a. m. Auch die gruppentheoretischen Gesichtspunkte erfahren die gebührende Berücksichtigung.

Da das Buch in einem hervorragenden, flüssigen Stil geschrieben ist, bietet es eine ganz ausgezeichnete Einführung in die Grundlagen der Geometrie, der der Referent nichts Gleichwertiges an die Seite zu stellen wüßte. Es kann Studierenden und Lehrern aller Kategorien nicht warm genug empfohlen werden.

J. Radon, Wien

Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébraique. Von *P. Samuel.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 4.) IX, 133 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 23. 60.

In der algebraischen Geometrie wurden in letzter Zeit große Fortschritte erzielt, insbesondere gelang es erst jetzt, grundlegende Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie mit Hilfe der modernen Algebra exakt zu formulieren und zu beweisen. Wir verdanken diese bedeutenden Resultate einer Reihe von Forschern, unter denen sich so hervorragende Männer wie z. B. *van der Waerden, Chevalley, Zariski* und *A. Weil* befinden. Der Verfasser des vorliegenden Buches, der zur algebraischen Geometrie bedeutsame Beiträge geliefert hat, gibt nun in ganz hervorragender Weise eine Darstellung des Werkes dieser Autoren, versehen mit vielen originellen Ideen von ihm selbst. Wie schwierig die Aufgabe ist, welche hier so meisterhaft gelöst ist, kann nur der ermessen, der versucht hat, die Literatur zu studieren. Dazu kommt ja noch, daß die algebraische Geometrie zu den schwierigsten Gebieten der Mathematik gehört.

Das Buch gliedert sich in zwei Kapitel. Das erste Kapitel, betitelt Elementare Theorie im Großen, beginnt mit der Definition der algebraischen Mannigfaltigkeiten, (A. M.) im affinen und projektiven Raum über einem beliebigen Körper k, der zugeordneten Ideale und der grundlegenden Begriffe, darunter der so wichtigen Begriffe des allgemeinen Punktes einer A. M. und der relationstreuen Spezialisierung (*van der Waerden*). Dann folgen die Sätze über Projektionen, Produkte und Durchschnitte von A. M. und die Theorie der normalen Modelle

(*Zariski*). Es werden die Änderungen untersucht, welche eintreten, wenn der Konstantenkörper durch einen Erweiterungskörper ersetzt wird (*Chevalley, Weil, Zariski*). Dann folgt die Theorie des „fast überall", dabei sagt man eine Eigenschaft $P(x)$ (wo x die Punkte einer A. M. durchläuft) gilt fast überall auf einer A. M., wenn die Menge der x, für die die Eigenschaft nicht gilt, in einer echten Teilmannigfaltigkeit von ihr liegen.

Den Hauptteil des Kapitels bildet die Theorie der Zyklen (*A. Weil*) oder virtuellen Mannigfaltigkeiten (*Severi*), der zugeordneten Formen von *Chow* und *van der Waerden* und der algebraischen Korrespondenzen, deren Bedeutung für die Grundlagen der algebraischen Geometrie von *van der Waerden* erkannt wurde.

Das zweite Kapitel bringt die algebraische Geometrie „im Kleinen". Es beginnt mit der Einführung des Quotientenringes in einem Punkte einer A. M., der Theorie der normalen und einfachen Punkte und des Tangentenraumes von *Zariski*. Den Höhepunkt dieses Kapitels und des ganzen Buches bildet die fundamentale Theorie der Multiplizität und des Durchschnittes von Zyklen. Diese Theorie wurde von *van der Waerden* inauguriert, aber die rein algebraische allgemeine Theorie verdanken wir *Chevalley* und *A. Weil* (hier ist auch der Verfasser zu nennen). Eine Zusammenstellung weniger geläufiger Begriffe und Sätze aus der Algebra, welche im Buch verwendet werden und einige historische Notizen beschließen das Buch.

Das Buch kann bereits von Studenten in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden.

E. Hlawka, Wien

Methods of Algebraic Geometry. Von *W. V. D. Hodge* und *D. Pedoe*. Band III. V, 336 S. London: Cambridge University Press. 1954.

Der dritte Band des groß angelegten Werkes soll diejenigen modernen Methoden der algebraischen Geometrie geben, welche in jüngster Zeit, vor allem durch die Arbeiten von *André Weil*, zur Erforschung der „Birationalen Geometrie" der algebraischen Mannigfaltigkeiten entwickelt wurden. Die Darstellung soll aber auch eine Brücke zwischen den klassischen und den modernen Methoden der algebraischen Geometrie schlagen und dies scheint uns das größte Verdienst dieses ausgezeichneten Werkes zu sein. Wie die Verf. selbst sagen, ist es auch für die Geometer geschrieben, welche in den klassischen Methoden ausgebildet sind und sehr gerne die neuen und mächtigen Hilfsmittel der modernen Algebra kennenlernen möchten und auch wissen möchten, was diese in der ihnen vertrauten Sprache bedeuten. Dieser letzteren, menschenfreundlichen Forderung wurde besondere Beachtung geschenkt. Die Kapitelüberschriften: Kap. 15 Idealtheorie der kommutativen Ringe; Kap. 16, Die arithmetische Theorie der Mannigfaltigkeiten; Kap. 17, Bewertungstheorie; Kap. 18, Birationale Transformationen. Besonders sei hier nur auf die schöne Einführung in die Idealtheorie hingewiesen, sowie auf die schwierigen Probleme über die Auflösung der Singularitäten durch birationale Transformationen, welche im letzten Kapitel behandelt werden und bisher teilweise nur in den Originalarbeiten von *Zariski* zugänglich waren. Erwähnt sei noch, daß grundsätzlich nur Grundkörper der Charakteristik Null betrachtet werden, teilweise um die Überlegungen „konkreter" zu gestalten und teilweise, weil für den Fall allgemeiner Charakteristik noch nicht so viele Resultate bewiesen sind.

Alles in allem ein wunderschönes Buch, welches abstrakte algebraische Geometrie in der voraussetzungslosen und unkomplizierten Art des englischen Stils dem erfreuten Leser vorsetzt.

K. Prachar, Wien

Altes und Neues über konvexe Körper. Von *H. Hadwiger*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus: Band III.) 116 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1955. sfr. 13.50.

Es sind fast 40 Jahre her, seit *W. Blaschke* sein Buch „Kreis und Kugel" schrieb, in dem er die grundlegenden Sätze von *Steiner*, *Brunn* und *Minkowski* über konvexe Körper in einem anregenden Lehrbuch darstellte. In dem vorliegenden Buch werden klassische und neuere Untersuchungen über konvexe Körper gebracht. Es werden mengengeometrische Methoden angewandt, also Überlegungen, die direkt an die Grundtatsachen der Punktmengenlehre, der Elementargeometrie und der Analysis der reellen Zahlen anschließen. Analytische Methoden, wie sie in der Differentialgeometrie üblich sind, werden fast nicht verwendet. Im Mittelpunkt des Buches stehen die 4 fundamentalen Maßzahlen, das sind Volumen, Oberfläche, Integral der mittleren Krümmung und die Gesamtkrümmung. Dann folgt der *Brunn-Minkowski*'sche Satz und die sich auf die 4 Maßzahlen beziehenden fundamentalen Ungleichungen. Wir erkennen, daß die Theorie noch nicht abgeschlossen ist. Es fehlen noch verschiedene Ungleichungen. Das letzte Kapitel bringt Formeln und Lehrsätze der Integralgeometrie, also jener Disziplin, die von beweglichen geometrischen Figuren und von invarianten Integralbildungen handelt. Es zeigt sich ein enger Zusammenhang zwischen Integralgeometrie und der Theorie der fundamentalen Maßzahlen der Eikörper. Die Funktionalsätze über Eikörper gestatten, die wichtigsten Formeln und Sätze der räumlichen Integralgeometrie auf einfache Weise abzuleiten. Ein reiches Literaturverzeichnis von Arbeiten über konvexe Körper und Integralgeometrie aus den letzten 15 Jahren bildet den Abschluß. Es zitiert 48 Arbeiten des Autors, der in besonderem Maße berufen war, ein Lehrbuch über konvexe Körper zu schreiben. Dabei hatte er die Möglichkeit, bereits bekannte Sätze und eigene Sätze mit seinen in vielen weit verstreuten Zeitschriften erschienenen Beweisen einem großen Leserkreis leicht zugänglich zu machen.

N. Hofreiter, Wien

Differentialgeometrie I. Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen: Band 1113/1113a.) 150 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 4.80.

Ziel der Sammlung Göschen ist es, das Wissen in kurzen, klaren und allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen nach den Lehrplänen der deutschen Hochschulen zu vermitteln. Dieses Ziel wird hier, auf dem Gebiete der Differentialgeometrie, in vorzüglicher Weise erreicht. Band I bringt die Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Band II wird jedenfalls die Flächentheorie behandeln und soll Anfang 1956 herauskommen. Gerade in der Differentialgeometrie sind exakte und gleichzeitig gut verständliche Darstellungen selten, und daher ist ein Buch wie dieses wärmstens zu empfehlen. Die Stoffauswahl hält sich im üblichen Rahmen, nur werden die komplexen Kurven sehr ausführlich behandelt. Die Berücksichtigung des Komplexen gibt viele neue und grundlegende Einsichten. Außerdem kann man es einem Autor nicht verargen, wenn er ein Teilgebiet besonders ausführlich darstellt, auf dem er eine Reihe von hervorragenden Arbeiten verfaßt hat, wie dies bei *K. Strubecker* auf dem Gebiete des isotropen Raumes der Fall ist. Manche Einzelheiten in der Darstellung sind eigenartig, so z. B. die Einführung der Bogenlänge (S. 16) und die der Krümmung (S. 22).

N. Hofreiter, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Die wissenschaftliche und angewandte Photographie

Erneuerung und Fortführung des Hay- v. Rohrschen Handbuchs der wissenschaftlichen und angewandten Photographie

Herausgegeben von **Kurt Michel,** Aalen/Württemberg

Das von A. Hay begründete, später von M. v. Rohr weitergeführte und zum Abschluß gebrachte Handbuch der wissenschaftlichen und angewandten Photographie erfreute sich seinerzeit großen Ansehens. Der 1943 von K. Michel herausgegebene Ergänzungsband war rasch vergriffen. Den gegenwärtigen Bedingungen Rechnung tragend, haben sich Verlag und Herausgeber entschlossen, das Handbuch als in sich abgeschlossene, einzeln käufliche Monographien neu herauszugeben.

Soeben erschienen:

Band I: **Das photographische Objektiv.** Von Dr. **Johannes Flügge,** R. Winkel G. m. b. H., Optische Werke, Göttingen. Mit einem Beitrag von Physiker Leo Bierwagen, Göttingen. Mit 196 teils farbigen Textabbildungen. XIII, 373 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 414.—, DM 69.—, sfr. 70.70, $ 16.45

Das moderne photographische Objektiv ist ein Erzeugnis, in dem sich wissenschaftliche Entwicklungsarbeit und technische Verwirklichung in einer noch vor wenigen Jahrzehnten unvorstellbaren Präzision verkörpern. Der vorliegende Band aus der Feder eines Fachmannes, der als Sachkenner und Entwicklungsexperte in großindustriellen optischen Fertigungsstätten seit langem bekannt ist, behandelt zunächst die Grundlagen der optischen Korrektion und des praktischen Einsatzes vom Standpunkt streng wissenschaftlicher Analyse, um sodann eine systematische Ordnung und Eigenschaftsbewertung der verschiedenen Objektivtypen aufzustellen. Im weiteren folgen die vielfältigen Verfahren der Gütekontrolle am fertigen Erzeugnis. Belegt werden die theoretischen Erörterungen mit einer größeren Zahl von Beispielen, die zugleich einen Einblick in die historische Entwicklung vermitteln. Neben den photographischen Objektiven selbst sind auch die Zubehörteile berücksichtigt, soweit sie optisches Interesse haben. Die Entspiegelung wird in einem besonderen Kapitel von Physiker L. Bierwagen erörtert. Den Abschluß bilden Tabellen der bekanntesten Markenobjektive mit Angaben ihrer Leistungsdaten.

Band III: **Die kinematographische Kamera.** Von Dipl.-Ing. Dr.-Ing. **Harald Weise,** Köln. Mit 521 Textabbildungen. XVI, 472 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 478.—, DM 79.80, sfr. 81.70, $ 19.—

Ein Fachmann ersten Ranges gibt einen Querschnitt durch die heutige Technik der kinematographischen Kameras, der alles Wesentliche über die theoretischen Grundlagen, die Konstruktion und die Arbeitsmöglichkeiten mit solchen Geräten bringt. Zahlreiche, nach didaktischen Gesichtspunkten entworfene Zeichnungen dienen dem Bestreben des Verfassers, eine größtmögliche Anschaulichkeit der Darstellung zu erreichen. Es werden nicht nur die zur Zeit bei den einzelnen Herstellerfirmen in der Fabrikation laufenden Geräte beschrieben, sondern auch ältere Apparate, sofern sie interessante Konstruktionseinzelheiten aufweisen und noch vielfach im Betrieb sind. Neben Geräten deutscher Firmen sind auch zahlreiche ausländische Konstruktionen berücksichtigt. Damit wird der Leser instand gesetzt, sich ein Bild über den Stand der Technik und die Arbeitsmöglichkeiten und Grenzen der heute bekannten Bauformen zu machen. Der Konstrukteur gewinnt so eine sichere Grundlage für die dem jeweiligen Verwendungszweck angepaßte optimale Konstruktion von Geräten. Besonders erwähnt sei noch das umfangreiche Literaturverzeichnis. Ein nach Firmen und Fabrikaten sowie ein alphabetisch geordnetes Sachverzeichnis (etwa 2400 Stichworte) erleichtern das Auffinden von Einzelheiten.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung